Análise Matemática IV
Problemas para as Aulas Práticas

20 de Fevereiro de 2006

Semana 9

1. Seja
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$
Determine $e^{t\mathbf{A}}$ e resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2. Seja
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

3. Seja
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4. Determine a solução geral do seguinte sistema de equações diferenciais:
$$\begin{cases} x' = 14x - 10y + 1 \\ y' = 10x - 2y + 2 \end{cases}$$
Sugestão: Determine primeiro uma solução particular constante.

5. Considere a seguinte matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Calcule $e^{\mathbf{A}t}$.

   (b) Determine a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{h}(\mathbf{t}) \\ \\ \mathbf{y}(1) = (1,1,1)^T \end{cases}$$

   onde $\mathbf{h}(\mathbf{t}) = (0, 2e^t, e^t)^T$.

6. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \\ \\ \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \end{cases}$$

   onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   (i) Determine a solução geral da equação homogénea.

   (ii) Sendo $\mathbf{y}(t) = [y_1(t)\ y_2(t)\ y_3(t)\ y_4(t)]^T$ a solução do problema não homogéneo, determine $y_2(3)$.

7. (i) Determine a solução do sistema linear

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

   que satisfaz a condição inicial $x(0) = y(0) + 1 = 1$.

   (ii) Considerando agora o sistema

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - y \\ z' = y - (\operatorname{sen} t)z \end{cases}$$

   utilize a alínea anterior para determinar a solução que verifica a condição inicial $x(0) = y(0) + 1 = z(0) = 1$.