Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

2^{o} Exame

(LEEC, MEEC)

Data: 22/01/2007, 13h00

Duração: 3h00.

I

1) Sejam (4,5val)

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x-e}{x+\pi} \geq 0\} \text{ e } B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + (\pi - 1)x - \pi \leq 0\}.$$

a) Escreva sob a forma de um intervalo ou de reunião de intervalos os conjuntos A e B e determine, se existirem em $\tilde{\mathbb{R}}$,

$$\inf A \cup B, \quad \sup B \cap \mathbb{Q}, \quad \max(A \cap \mathbb{R}^-) \cup B, \quad \inf A \cap B$$

Como $A = \{x \in \mathbb{R} : x - e \geq 0 \wedge x + \pi > 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x - e \leq 0 \wedge x + \pi < 0\}$, é fácil ver que

$$A =]-\infty, -\pi[\cup [e, +\infty[.$$

Pela fórmula resolvente para eqs. do 2º grau, temos que $x^2 + (\pi - 1)x - \pi = 0$ sse $x = -\pi$ ou $x = 1$. Como $f(x) = x^2 + (\pi - 1)x - \pi$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$ que se anula apenas nos pontos indicados, e $f(0) = -\pi < 0$, temos que $[-\pi, 1] \subset B$. De igual forma. é fácil ver, que $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \backslash [-\pi, 1]$, pelo que

$$B = [-\pi, 1].$$

Então:

$$\inf A \cup B = -\infty,$$
$$\sup B \cap \mathbb{Q} = 1,$$
$$\max(A \cap \mathbb{R}^-) \cup B = \max]-\infty, 1] = 1,$$
$$\inf A \cap B = \inf \emptyset = -\infty,$$

(uma vez que o conjunto dos minorantes de $\emptyset$ é $\mathbb{R}$).

b) Diga, <u>justificando</u>, se é verdadeira ou falsa cada uma das proposições seguintes:

(i) Toda a sucessão crescente de termos em B tem limite e o seu limite é o número 1.
Falsa; Sendo a sucessão monótona e limitada (uma vez que tem termos em B, um conj. limitado), será convergente, mas não necessáriamente para o supremo de B. Exemplo $x_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}_1$.

(ii) Toda a função definida e contínua em B tem supremo e ínfimo.
Verdadeira; o conjunto B é limitado e fechado, pelo que, pelo T. de Weierstrass, f tem máximo e mínimo em B (e portanto supremo e ínfimo).

(iii) Se f, definida e contínua em B, é tal que:

existem $x \in B \cap \mathbb{R}^-$ e $y \in B \cap \mathbb{R}^+$ satisfazendo $f(x).f(y) < 0$,

então existe $c \in B$ tal que $f(c) = 0$.
Verdadeira; a condição garante a existência de 2 pontos em B num dos quais f toma um valor positivo e noutro um valor negativo. O teorema do valor intermédio garante então a existência de c (entre esses dois pontos) tal que $f(c) = 0$.

2) Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das proposições seguintes: (1.5 val)
Seja g uma função com segunda derivada contínua em $\mathbb{R}$ e suponha que $g'(a) = 0$.

a) g tem um extremo local no ponto a.
Falsa (ex. $g(x) = x^3,\ a = 0$)

b) Se $g''(a) = 0, g$ tem em a um ponto de inflexão.
Falsa (ex. $g(x) = x^4,\ a = 0$)

c) Se $g''(a) > 0, g$ tem em a um mínimo local.
Verdadeira

II

1) Prove por indução que: (1 val)

$$2^{n+3} < (n+3)!, \qquad \forall n \geq 1.$$

Temos que $2^4 = 16 < 4! = 24$, pelo que a condição é verdadeira para $n = 1$. Supondo que a condição é verdadeira para algum $p \geq 1$, temos que mostrar então que ela é verdadeira para $p+1$. Ora:

$$2^{p+1+3} = 2^{p+4} = 22^{p+3} < 2(p+3)!,$$

pela hipótese de indução, e

$$2(p+3)! < (p+4)(p+3)! = (p+4)!,$$

uma vez que $p \geq 1 \Rightarrow (p+4) > 4 > 2$.

2) Calcule, se existirem em $\tilde{\mathbb{R}}$, os seguintes limites: (3 val)

$$\lim_{x\to 0^+} x \log x^2, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{sen} \log x}{x}, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_x^{x^2} \log t \, dt}{x}$$

No primeiro caso, $\lim_{x\to 0^+} x \log x^2$, temos uma indeterminação do tipo $0.\infty$. Para levantar essa indeterminação pela regra de Cauchy, escrevemos na forma de uma indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$, e temos que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x^2}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2x}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Estamos nas condições de aplicar a regra de Cauchy uma vez que as funções no numerador e no denominador são diferenciáveis em $\mathbb{R}^+$ e a derivada da função do denominador é diferente de zero nessa região. A existência do 2º limite (em $\tilde{\mathbb{R}}$) implica a existência do 1º e com o mesmo valor.

O $\lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{sen} \log x}{x}$ é trivialmente igual a zero bastando para obter esta conclusão notar que:

$$0 \leq \frac{\operatorname{sen} \log x}{x} \leq \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^+,$$

e usar (p. ex.) a definição de limite no sentido de Heine e o Teorema das sucessões enquadradas.

Atendendo a que (pelo T. Fundamental da Análise e pela diferenciabilidade da composta) a função

$$\phi(x) = \int_x^{x^2} \log t \, dt$$

é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ (e portanto contínua em $\mathbb{R}$) temos que:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_x^{x^2} \log t\, dt}{x} = \frac{\phi(0)}{0} = \frac{0}{0}.$$

Para levantar a indeterminação, novamente pela regra de Cauchy, temos que calcular o limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\phi'(x)}{1} = \lim_{x\to 0^+} 2x \log x^2 - \log x.$$

Nota: a derivada de ϕ' resulta do T. Fundamental da Análise e da regra de derivação das funções compostas.
Atendendo ao primeiro exercício, este limite é igual a $0 - (-\infty) = +\infty$ (em $\tilde{\mathbb{R}}$) e concluímos que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_x^{x^2} \log t\, dt}{x} = +\infty \text{ em } \tilde{\mathbb{R}}$$

3) Determine uma primitiva de cada uma das funções seguintes: (4val)

$$\frac{2}{\sqrt{4-16x^2}}, \qquad \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}, \qquad \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}, \qquad \frac{x}{x^2-2x-3}$$

$$P\left(\frac{2}{\sqrt{4-16x^2}}\right) = \frac{1}{2} P\left(\frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} 2x.$$

$$P\left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right) = 2P\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}\right) = 2e^{\sqrt{x}}.$$

$$P\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\right) = -\operatorname{arctg}(\cos x).$$

$$P\left(\frac{x}{x^2-2x-3}\right) = \frac{1}{4}\left[P\left(\frac{1}{x-3}\right) - P\left(\frac{1}{x+1}\right)\right] = \frac{1}{4}\log\frac{|x-3|}{|x+1|}.$$

4) Calcule a área da região plana delimitada pelas rectas verticais de equações $x = -1$ e $x = 1$ e pelos gráficos das funções $\operatorname{arctg}|x|$ e $x^2 - 1$. (2 val)
Uma vez que as funções $\operatorname{arctg}|x|$ e $x^2 - 1$ são pares,

$$A = \int_{-1}^{1} \operatorname{arctg}|x| - (x^2-1)\, dx = 2\int_0^1 \operatorname{arctg} x - (x^2-1)\, dx.$$

Para aplicarmos a Regra de Barrow necessitamos de determinar uma primitiva de $\operatorname{arctg} x$. Primitivando por partes:

$$P(\operatorname{arctg} x) = x \operatorname{arctg} x - P(x\frac{1}{1+x^2}) = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2),$$

e portanto a área pretendida é dada por:

$$A = 2\left[x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) - \frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} - \log 2.$$

III

1) Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por (4 val)

$$\phi(x) = \int_1^{x^2} \operatorname{arctg} e^{-t}\, dt$$

a) Justifique que ϕ é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e calcule ϕ'.
A função ϕ resulta da composição de uma função integral indefenido com integranda contínua em $\mathbb{R}$, (e portanto, pelo T. Fundamental da Análise, diferenciável em $\mathbb{R}$) com uma função ($y = x^2$) diferenciável em $\mathbb{R}$. Portanto, ϕ é diferenciável em $\mathbb{R}$ tendo-se:

$$\phi'(x) = 2x \operatorname{arctg} e^{-x^2} \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como ϕ' dada pela fórmula anterior resulta de operações algébricas e da composição de funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$, é igualmente diferenciável em $\mathbb{R}$ (ou seja ϕ é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$).

b) Determine os intervalos de monotonia de ϕ e os seus extremos locais.
Como $\operatorname{arctg} e^{-x^2} > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$, temos que ϕ' só se anula em $x = 0$, sendo positiva para $x > 0$ e negativa para $x < 0$. Consequentemente, ϕ é (estritamente) decrescente em $\mathbb{R}^-$ e (estritamente) crescente em $\mathbb{R}^+$, tendo um mínimo (absoluto) em $x = 0$.

c) Justifique que existe $c \in]0, \sqrt{-\log \frac{\pi}{4}}[$ tal que $\phi''(c) = 2 \operatorname{arctg} \frac{\pi}{4}$

Como ϕ' é diferenciável em $\mathbb{R}$, é em particular diferenciável em $]0, \sqrt{-\log \frac{\pi}{4}}[$ e contínua em $[0, \sqrt{-\log \frac{\pi}{4}}]$.
O Teorema de Lagrange garante então a existência de $c \in]0, \sqrt{-\log \frac{\pi}{4}}[$, tal que:

$$\phi''(c) = \frac{\phi'(\sqrt{-\log \frac{\pi}{4}}) - \phi'(0)}{\sqrt{-\log \frac{\pi}{4}} - 0} = 2 \operatorname{arctg} \frac{\pi}{4}.$$