

1 Introdução

Este documento contém algumas indicações de resolução do 1º teste de Análise Matemática III para os cursos de Matemática e Física no 1º semestre de 1999/2000. Não se deve inferir que as indicações apresentadas são únicas ou completas. Optei por apresentar soluções para a versão corrigida do enunciado disponível em

<http://www.math.ist.utl.pt/~jmatos/AMIII/exames/AMIII99T1.pdf>

Como é sabido a pergunta 4.a) tinha uma gralha que impossibilitava a sua solução e a 3.b) tinha outra gralha que não afectava a possibilidade de resolver a questão simplificando-a ligeiramente.

2 Indicações para resolução

- (a) Se no sistema de estacionaridade uma das equações for multiplicada por x e a outra por y e subtraídas termo a termo é possível concluir que todas as soluções que não se encontram sobre os eixos coordenados devem verificar $x = y$. Obtida esta informação é fácil concluir que os únicos pontos de estacionaridade são $(0, 0)$, $(1/2, 1/2)$ e $(1, 1)$. Da definição da função é fácil concluir que o primeiro e o último são pontos de sela e usando o teorema de Weierstrass aplicado à restrição da função ao conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ que o segundo é um ponto de máximo local. Alternativamente podem ser usados critérios baseados na análise do termo de segunda ordem da fórmula de Taylor.
(b) O limite indicado caracteriza o resto de sexta ordem da fórmula de Taylor. Esta coincide com o argumento do sen. Detalhes para problemas similares estão abundantemente exemplificados no texto.

<http://www.math.ist.utl.pt/~jmatos/AMIII/temp.pdf>

- O esboço da região apresenta-se na figura 1. Note para esboçar a região de integração que, se $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$, então $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq x + y + z$ e que para x fixo a função $y \mapsto (1 - \sqrt{x} - \sqrt{y})^2$ é côncava. Para obter uma soma de integrais iterados que representa o integral, via teorema de Fubini integrando primeiro em ordem a x , note que terá que usar limites de integração distintos consoante uma recta paralela ao eixo dos x intersecta uma das regiões

$$C = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0, z \geq 0, y + z \leq 1, \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq 1\},$$
$$B = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0, z \geq 0, \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 1\}.$$

Designando $\hat{C} = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : (0, y, z) \in C\}$, $\hat{B} = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : (0, y, z) \in B\}$ temos

$$\iiint_A h \, dx \, dy \, dz =$$
$$\iint_{\hat{B}} \left(\int_{(1-\sqrt{y}-\sqrt{z})^2}^{1-y-z} h \, dx \right) dy \, dz + \iint_{\hat{C}} \left(\int_0^{1-y-z} h \, dx \right) dy \, dz$$

Deixa-se ao leitor a determinação dos limites de integração para \hat{B} e \hat{C} .

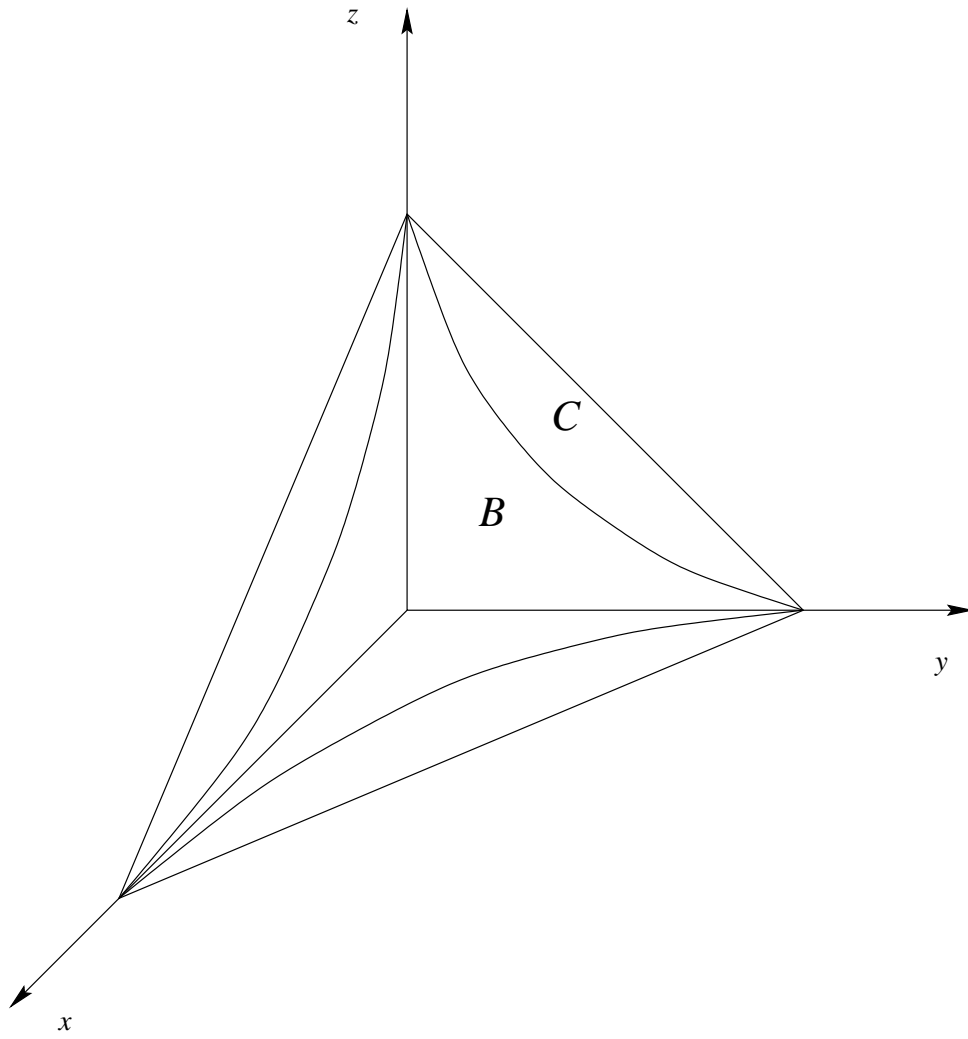


Figura 1: A região de integração no problema 2.

3. (a) Admitindo por um momento que é possível trocar o integral com o limite verifica-se que o limite pontual quase por toda a parte das funções integrandas é a função $[1, +\infty[^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \equiv \frac{1}{x^2 y^3}$. O limite não existe ou é 0 sobre uma família numerável de semi-rectas que tem medida nula.

Para decidir se a função f é integrável e calcular o seu integral considere-se o raciocínio habitual usando teorema da convergência monótona, isto é, define-se $f_M(x, y) = f(x, y)$ se $(x, y) \in [1, M]^2$, $f_M(x, y) = 0$ caso contrário e calcula-se

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \iint_{[1, +\infty[^2} f_M = \frac{1}{2}.$$

Esta informação torna possível justificar que cada uma das funções que aparecem no limite a calcular é integrável e justificar a troca do limite com o integral, em ambos os casos usando o teorema da convergência dominada com a estimativa

$$\frac{1}{x^2 y^3} |1 - \cos^k(y/x)| \leq 2f(x, y).$$

Outros exemplos mais detalhados de solução de problemas similares encontram-se em

http://www.math.ist.utl.pt/~jmatos/am3sem1/prob_com.pdf

- (b) Use-se o teorema da convergência dominada estimando

$$(|x|^p + |y|^p)^{1/p} \leq 2$$

para garantir a troca do limite com o integral. O limite de $\varphi(x, y, p)$ quando $p \rightarrow \infty$ é 1. Usando a simetria da função o resultado é

$$4 \iint_{x \geq |y|} x \, dx \, dy = 4 \int_0^1 \left(\int_{-x}^x x \, dy \right) dx.$$

4. (a) A desigualdade permite estimar o integral de linha sobre uma circunferência centrada em $(0, 0)$ como sendo não nulo. Logo o campo não pode ser um gradiente.
- (b) O enunciado só fará sentido se o integral de linha for independente do caminho e as fronteiras de bolas centradas na origem forem equipotenciais do campo. Logo um potencial terá que ser da forma $\psi(\|\mathbf{x}\|)$. Calcule o gradiente de um tal potencial para descobrir que $\psi' = \varphi$.