Resumo

Este documento agrupa um conjunto de enunciados e soluções de problemas relevantes para a disciplina de Análise Matemática III do IST. Está a ler a versão produzida em 17 de Setembro de 1999.
A versão mais recente está disponível em
`http://www.math.ist.utl.pt/~jmatos/am3sem1/prob_com.ps`
`http://www.math.ist.utl.pt/~jmatos/am3sem1/prob_com.pdf`

A existência de gralhas será inevitável e agradeço a quem mas comunicar para `jmatos@math.ist.utl.pt`

Neste endereço não haverá resposta directa a quaisquer tipos de dúvidas embora as questões postas possam levar a uma actualização de parte do texto.

Alguns Problemas Comentados de Análise Matemática III

João Palhoto Matos

17 de Setembro de 1999

1 Introdução

No ano lectivo 1996/97 alguns alunos reinvidicaram que, a complementar o trabalho das aulas práticas, existissem exemplos de soluções de alguns problemas. Este texto surgiu como uma resposta a esse pedido. Não acredito que o aprender Matemática seja redutível ao estudo de casos típicos de problemas no entanto creio que é lícito ter a noção de como escrever Matemática e qual o conjunto de conhecimentos que se podem admitir como já existentes, algo que espero dê, em geral, uma sensação de maior segurança a quem aprende.

A escolha de problemas corresponde a fornecer soluções e comentários face ao que me pareceu importante depois de muitas sessões de dúvidas e vários exames.

Os exercícios por vezes não aparecem na sua versão original embora o aluno minimamente atento deverá perceber qual a origem. Tal deve-se a tentar definir os métodos a utilizar independentemente do livro de texto, ou *a posteriori* ter decidido que o enunciado original de um exame não me agradava, ou simplesmente não querer fornecer uma solução do original.

Alguns dos problemas têm como fim ilustrar as definições ou resultados e não correspondem ao método mais eficaz de resolver uma questão. Indicações desse tipo aparecem nos comentários.

O texto não pretende ser auto contido e é propositadamente curto (menos de 25 páginas). Recomenda-se a consulta dos livros adoptados nos últimos anos no IST da autoria do Prof. Luís Magalhães [Mag96, Mag93]. A presente versão destas notas procura indicar referências aos resultados mais importantes destes textos como é sugerido neste parágrafo através de uma nota à margem. Obviamente a consulta de outros textos pode ser proveitosa e a bibliografia inclui referências adicionais a alguns clássicos nacionais e estrangeiros [Apo69, Agu73, Apo74]. Obviamente diferem em ênfase, estilo e profundidade.

Textos base [Mag96, Mag93]

Textos mais extensos com exercícios e soluções que merecem confiança são, por exemplo, [SG97, Gir96].

A elaboração deste texto teve alguns objectivos secundários:

- Combater a proliferação de cópias não assinadas de soluções de problemas de origem nebulosa e de elevada densidade de disparates pelas quais alguns alunos têm uma apetência inexplicável;
- Testar se a disseminação de material deste tipo via Internet o torna mais acessível e com uma retroacção mais eficaz;
- Testar as tecnologias existentes que associam Matemática e hipertexto.

Por fim faço notar que a partir de Setembro de 1998 este documento passou a ser distribuido electronicamente de duas formas:

1. Um ficheiro Postscript (`*.ps`) adequado para impressão e visionamento sem hipertexto.

2. Um ficheiro Portable Document Format(`*.pdf`) um documento interactivo que permite efectuar buscas mas que ainda está longe de ter características finais. Este documento foi obtido usando pdftex e é legível usando Acrobat Reader um produto de *Adobe Systems* de distribuição graciosa.

2 Os problemas

2.1 Integrais múltiplos

1 *Utilizando directamente a definição de integral de Riemann mostre que a função* $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \textit{se } x+y=1, \\ 0 & \textit{se } x+y \neq 1 \end{cases}$$

é integrável em $[0,1]^2$ *e calcule o integral.*

Resolução. Considere-se uma qualquer partição P do intervalo $[0,1]^2$. O ínfimo da função em qualquer subintervalo com interior não vazio definido por P é 0 de maneira que $\underline{\int}_{[0,1]^2} f = 0$ pois qualquer um desses subintervalos contém pontos do complementar do segmento de recta que une $(0,1)$ a $(1,0)$. O supremo da função em cada um desse subintervalos é 1 se o subintervalo intersecta o referido segmento ou 0 caso contrário. Como a soma dos volumes de tais subintervalos parece poder ser arbitrariamente pequena quando consideramos partições mais finas é natural tentar provar que $\overline{\int}_{[0,1]^2} f = 0$. Tal implicará que a função é integrável com $\int_{[0,1]^2} f = 0$.

Tentamos então justificar a afirmação sobre o integral superior. Basta exibir uma sucessão de funções em escada definidas em $[0,1]^2$, $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$, tal que $s_k \geq f$ para todo o $k \in \mathbb{N}$ e $\int_{[0,1]^2} s_k \to 0$ quando $k \to \infty$. Possíveis s_k podem ser definidos por

$$s_k(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \in \cup_{j=0}^{2^k-1}[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}] \times [\frac{2^k-j-1}{2^k}, \frac{2^k-j}{2^k}], \\ 0 & \text{nos casos restantes.} \end{cases}$$

Com efeito

$$\int_{[0,1]^2} s_k = \sum_{j=0}^{2^k-1} 1 \cdot \operatorname{vol}\left(\left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right] \times \left[\frac{2^k-j-1}{2^k}, \frac{2^k-j}{2^k}\right]\right) = \frac{1}{2^{k-1}} \to 0$$

quando $k \to \infty$.

Comentário. *O problema destina-se a familiarizar o aluno com o conceito de integral de Riemann e com a notação usada na sua definição. A justificação que tal função é integrável e o cálculo do integral podem ser feitos usando resultados posteriores de uma forma muito mais rápida : a função está definida num intervalo, o seu conjunto de pontos de descontinuidade é o segmento de recta unindo* $(0,1)$ *a* $(1,0)$ *que tem medida bi-dimensional nula, logo a função é integrável à Riemann, logo também à Lebesgue e no cálculo do integral podemos substituir a função pela função identicamente nula que só difere de* f *num conjunto de medida nula.*

Integral de Riemann [Mag96, 5]
Medida nula [Mag96, 19]

2 *Considere a função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 & \textit{se } \sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{n} + \frac{\pi}{m} \textit{ para alguns } m,n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Decida se f *é integrável à Riemann em* $[0,1]^2$*.*

Resolução. Utiliza-se o critério de Lebesgue sobre a integrabilidade à Riemann: "Uma função limitada definida num intervalo compacto é integrável à Riemann sse o seu conjunto de pontos de descontinuidade tiver medida nula."

Critério de Lebesgue [Mag96, 25]

Vamos então determinar o conjunto dos pontos de descontinuidade de f. Introduzimos a notação $A = \{(x,y) \in [0,1]^2 : \exists_{m,n\in\mathbb{N}} \sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{n} + \frac{\pi}{m}\}$, $B = [0,1]^2 \setminus A$. Como as restrições de f a A e a B são funções contínuas os únicos pontos de descontinuidade estarão contidos em $\overline{A} \cap \overline{B}$. Além disso $(x_0,y_0) \in \overline{A} \cap \overline{B}$ será um ponto de descontinuidade sse

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0),(x,y)\in A} f(x,y) \neq \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0),(x,y)\in B} f(x,y).$$

O conjunto $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A}$ é formado por todas as circunferências centradas em $(0,0)$ com raios da forma $\frac{1}{n} + \frac{\pi}{m}$ com $m,n \in \mathbb{N}$, ou da forma $\frac{1}{n}$ com $n \in \mathbb{N}$, ou da forma $\frac{\pi}{m}$ com $m \in \mathbb{N}$ e pela origem. Em todos estes pontos os limites considerando restrição a A ou a B são distintos excepto sobre a circunferência de raio 1 centrada em $(0,0)$ em que ambos os limites são 0. Uma circunferência ou um ponto são conjuntos com medida bidimensional nula. $\overline{A}$ é uma união numerável de tais conjuntos pelo que tem medida nula e podemos concluir que f é integrável à Riemann.

Propriedades de conjuntos com conteúdo ou medida nulos [Mag96, 20-21]

Comentário. *O enunciado é uma alteração dum exercício recomendado destinada a evidenciar que a situação no exercício original é um pouco mais simples do que seria razoável esperar em geral (no exercício original tem-se continuidade no único ponto de* $\overline{A}$ *que não pertence a* A *e o conjunto dos pontos de descontinuidade é simplesmente* A*).*

Na resolução apresentada várias afirmações são feitas sem uma justificação detalhada. Aconselha-se a verificação daquelas em que haja dúvidas.

3 *Considere o conjunto*

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, (x-1)^2 + y^2 \geq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

e uma função $f : S \to \mathbb{R}$ *integrável em* S*. Escreva* $\iint_S f$ *em termos de integrais iterados da forma*

a) $\int(\int \cdots dx)dy$.

b) $\int(\int \cdots dy)dx$.

c) $\int(\int \cdots dr)d\theta$ *em que* r, θ *são as coordenadas polares usais.*

Resolução. A região S está esboçada na figura 1.

Os pontos de intersecção das duas circunferências obtêm-se da resolução do sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ (x-1)^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

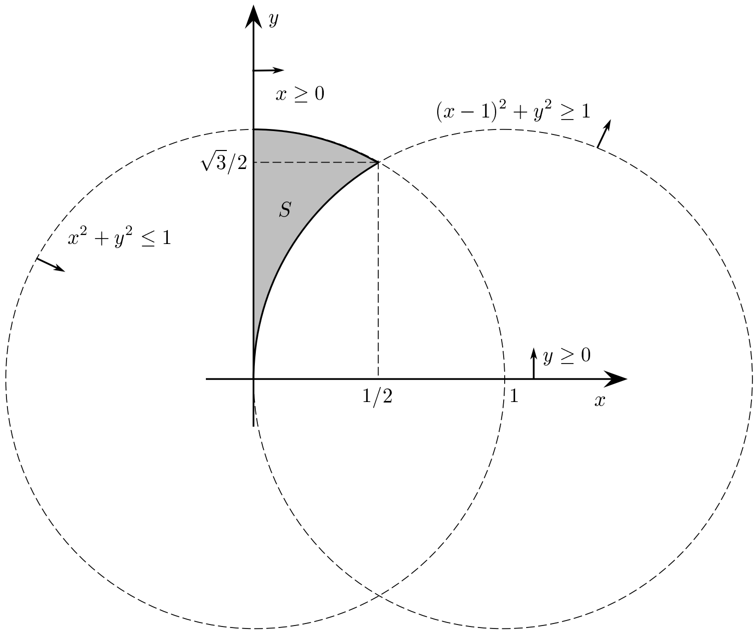

Figura 1: A região S no problema 3.

a) A solução de $(x-1)^2 + y^2 = 1$ em ordem a x que satisfaz $x < 1$ é $x = 1 - \sqrt{1-y^2}$. A solução de $x^2 + y^2 = 1$ em ordem a x que satisfaz $x > 0$ é $x = \sqrt{1-y^2}$. Daí que

$$\iint_S f\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\int_0^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx \right) dy + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

b) A solução de $(x-1)^2 + y^2 = 1$ em ordem a y que satisfaz $y > 0$ é $y = \sqrt{1-(x-1)^2}$. A solução de $x^2 + y^2 = 1$ em ordem a y que satisfaz $y > 0$ é $y = \sqrt{1-x^2}$. Daí que

$$\iint_S f\,dx\,dy = \int_0^{1/2} \left(\int_{\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

c) As coordenadas polares usuais podem ser definidas por

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\operatorname{sen}\theta, \end{cases}$$

com $r \geq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Em coordenadas polares (r,θ) as condições que definem S tomam a forma $\theta \in [\pi/3, \pi/2]$, $r \leq 1$, $r - 2\cos\theta \geq 0$. O ponto de intersecção das duas circunferências no primeiro quadrante corresponde a $\theta = \pi/3$. Daí que

$$\iint_S f\,dx\,dy = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left(\int_{2\cos\theta}^1 f(r,\theta) r\,dr \right) d\theta.$$

Comentário. *Claro que do ponto de vista teórico os resultados que estamos a usar são o teorema de Fubini e o teorema de mudança de variáveis na integração. No entanto a razão básica para incluir este problema foi, mais prosaicamente, chamar a atenção de como descrever uma linha ou uma região num novo sistema de coordenadas.*

Teorema de Fubini [Mag96, 6] Mudança de variáveis [Mag96, 73]

4 *Seja* $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + |y| \leq 1,\ x + z \leq 1,\ x \geq 0,\ z \geq 0\}$ *e* $f : V \to \mathbb{R}$ *uma função integrável. Exprima o integral* $\iiint_V f$ *em termos de integrais iterados*

a) $\int_{\cdots}^{\cdots}(\int_{\cdots}^{\cdots}(\int_{\cdots}^{\cdots} f(x, y, z)\, dz)dy)dx$.

b) $\int_{\cdots}^{\cdots}(\int_{\cdots}^{\cdots}(\int_{\cdots}^{\cdots} f(x, y, z)\, dx)dy)dz$.

Resolução.

a)

$$\iiint_V f = \int_0^1 \left(\int_{x-1}^{1-x} \left(\int_0^{1-x} f(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx$$

b)

$$\begin{aligned}\iiint_V f = &\int_0^1 \left(\int_{-1}^{-z} \left(\int_0^{1+y} f(x, y, z)\, dx \right) dy \right) dz \\ &+ \int_0^1 \left(\int_{-z}^{z} \left(\int_0^{1-z} f(x, y, z)\, dx \right) dy \right) dz \\ &+ \int_0^1 \left(\int_{z}^{1} \left(\int_0^{1-y} f(x, y, z)\, dx \right) dy \right) dz\end{aligned}$$

Comentário. *Algo que confunde um número considerável de pessoas que pela primeira vez calculam um integral em* $\mathbb{R}^3$ *é o estabelecer uma boa estratégia para determinar limites de integração ao integrar em regiões de* $\mathbb{R}^3$ *que não são intervalos. Vou tentar sistematizar as duas variantes naturais de raciocínio e exemplificar com este problema. Vamos supor que pretendemos calcular* $\iiint_V f$ *pela ordem de integração* $\int_{\cdots}^{\cdots}(\int_{\cdots}^{\cdots}(\int_{\cdots}^{\cdots} f(x, y, z)\, dx)dy)dz$. *O teorema de Fubini fornece duas possíveis decomposições iniciais em integrais iterados:*

Teorema de Fubini [Mag96, 6]

1. $\iiint_V f = \iint_{\mathrm{proj}_{yz}(V)} \left(\int_{I(y,z)} f(x, y, z)\, dx \right) dy\, dz$,
2. $\iiint_V f = \int_{\mathrm{proj}_z(V)} \left(\iint_{A(z)} f(x, y, z)\, dx\, dy \right) dz$,

em que estamos a usar as notações

$$\begin{aligned}\mathrm{proj}_{yz}(V) &= \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : \exists_{x\in\mathbb{R}} (x, y, z) \in V\},\\ \mathrm{proj}_z(V) &= \{z \in \mathbb{R} : \exists_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} (x, y, z) \in V\},\\ I(y, z) &= \{x \in \mathbb{R} : (x, y, z) \in V\},\\ A(z) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in V\}.\end{aligned}$$

Note-se que podemos interpretar $\mathrm{proj}_{yz}(V)$ *como a projecção de* V *no plano* yz, $\mathrm{proj}_z(V)$ *como a projecção de* V *no eixo dos* z*'s,* $I(y, z)$ *como a intersecção de* V *com a recta paralela ao eixo dos* x*'s definida por* y *e* z *e* $A(z)$ *como a intersecção de* V *com o plano paralelo ao plano* xy *com cota* z*. O primeiro passo da determinação dos limites de integração usando cada um destes processos é ilustrado nas figuras seguintes.*

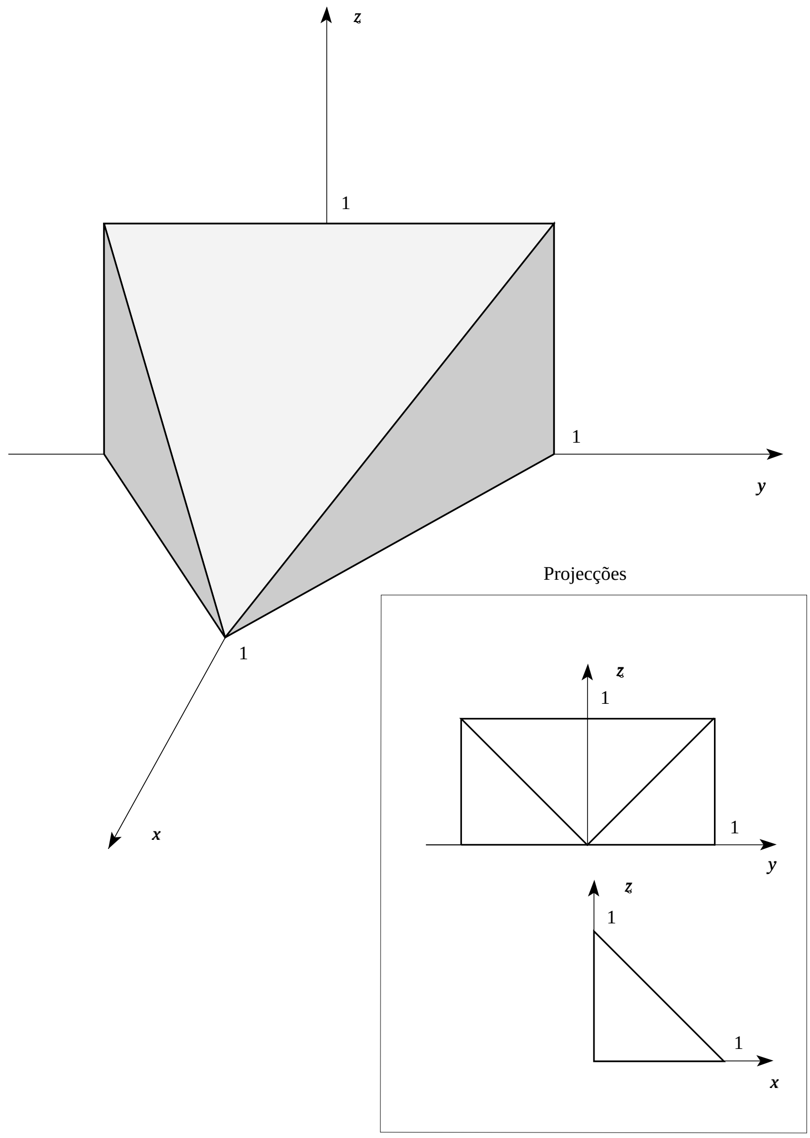

Figura 2: A região V do problema 4 e as suas projecções em dois planos coordenados.

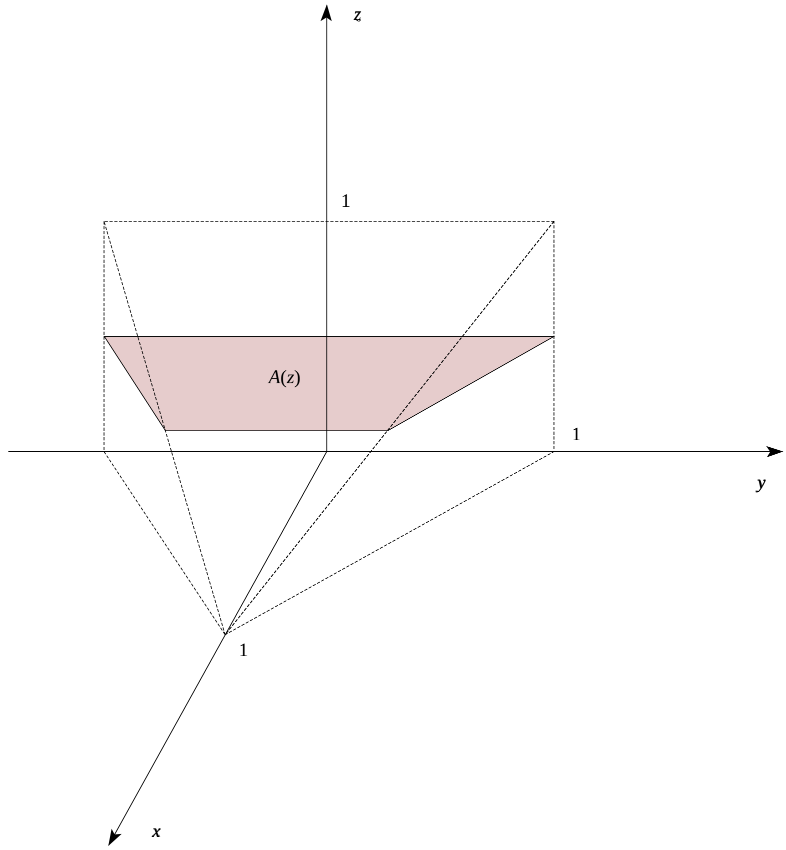

Figura 3: Decompondo $\iiint_V f = \int_{\mathrm{proj}_z(V)} \left(\iint_{A(z)} f\, dx\, dy \right) dz$ no problema 4.

5 *Considere*

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0, y^2 + z^2 \leq 1\}$$

e $f : V \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y,z) = (x^2 + y^2)^{-3/4} \sqrt{1 - y^2}.$$

Calcule $\iiint_V f$.

Resolução. Consideramos a mudança de variáveis (coordenadas cilíndricas) definida por

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

com $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Com estas variáveis V é descrita por $0 \leq r \leq 1$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $0 \leq z \leq \sqrt{1 - r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}$ e o módulo do determinante da matriz jacobiana da

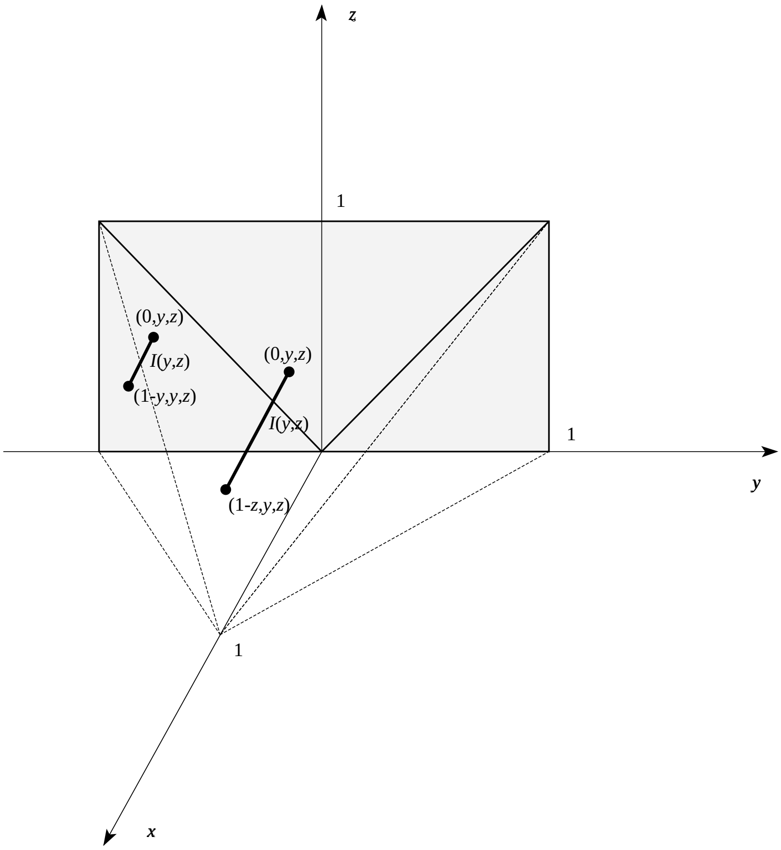

Figura 4: Decompondo $\iiint_V f = \iint_{\mathrm{proj}_{yz}(V)} \left(\int_{I(y,z)} f\, dx \right) dy\, dz$ no problema 4.

transformação é r. Daí considerarmos o integral

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} r^{-3/2} \sqrt{1 - r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\, r\, dz \right) dr \right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^{-1/2} (1 - r^2 \operatorname{sen}^2 \theta)\, dr \right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^{-1/2} - r^{3/2} \operatorname{sen}^2 \theta\, dr \right) d\theta \\
&= 4\pi - 2\pi \frac{2}{5} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \theta\, d\theta = \frac{18}{5} \pi.
\end{aligned}
$$

Que este cálculo conduz ao resultado desejado é uma consequência, entre outros, do critério de Tonelli, do teorema de Fubini e do teorema de mudança de variáveis de integração.

Teorema de Tonelli [Mag96, 68]
Teorema de Fubini [Mag96, 67]
Teorema de mudança de variáveis [Mag96, 73]

Comentário. *A solução não é obviamente única mas a utilização da transformação de coordenadas indicada ou similar é altamente aconselhável devido à região de integração estar contida no cilindro definido por $x^2 + y^2 \leq 1$ e ao tipo de singularidade da função integranda sobre o eixo dos zz's.*

6 *Decida se existem ou não os integrais*

a)

$$\int_0^\pi \frac{\sqrt{x(\pi - x)}}{\operatorname{sen} x}\, dx$$

b)

$$\iint_{\mathbb{R}^2} 1 - e^{-\frac{1}{x^2y^2}}\, dx\, dy.$$

Resolução.

a) A função integranda, designemo-la por g, não é limitada pelo que o integral não pode estar definido à Riemann. Para investigar a sua existência no sentido de Lebesgue notamos que g é contínua no intervalo aberto limitado $]0, \pi[$ pelo que é mensurável e bastará estudar o comportamento da função "perto" de 0 e "perto" de π. Podemos usar o facto de $g(x) = g(\pi - x)$ para reduzir o estudo ao intervalo $]0, \pi/2[$ via mudança de variáveis.

Como $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ e $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \sqrt{\pi - x}$ temos

$$\lim_{x\to 0} \frac{1/\sqrt{x}}{g(x)} = 1/\sqrt{\pi}.$$

Daí existe $C > 0$ tal que $|g(x)| \le 1/\sqrt{x}$ para $x \in\,]0, \pi/2[$. Como se conhece que $\int_0^{\pi/2} 1/\sqrt{x}\, dx$ existe podemos concluir que a função é integrável. Mensurabilidade [Mag96, 56]

b) Se o integral existisse o teorema de Fubini seria aplicável e Teorema de Fubini [Mag96, 67]

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} 1 - e^{-\frac{1}{x^2y^2}}\, dx\, dy &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} 1 - e^{-\frac{1}{x^2y^2}}\, dx \right) dy \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|y|}\, dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}} 1 - e^{-\frac{1}{u^2}}\, du \right)\end{aligned}$$

em que se utilizou a mudança de variáveis $u = xy$ e a existência do integral $\int_{\mathbb{R}} 1 - e^{-1/t^2}\, dt$. Como o integral $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|y|}\, dy$ não existe concluímos que o integral original não existe.

Comentário. *Na alínea b) é de notar que o mesmo método mostra que, sendo h uma função integrável em $\mathbb{R}$ que não é 0 quase por toda a parte, a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = h(xy)$ não é integrável em $\mathbb{R}^2$.*

7 *Calcule justificadamente*

a)

$$\lim_{k\to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(t/k)^2}}{1 + t^2}\, dt$$

b)

$$\lim_{k\to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(t/k)^2}}{1 + |t|}\, dt$$

Resolução.

a) Temos que $\lim_{k\to\infty} \frac{e^{-(t/k)^2}}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2}$ para todo o $t \in \mathbb{R}$. A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(t) = \frac{1}{1+t^2}$ é integrável em $\mathbb{R}$ pois se para cada $k \in \mathbb{N}$ definirmos

$$g_k(t) = \begin{cases} g(t), & \text{se } t \in [-k, k], \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

temos $g_k < g_{k+1}$ para todo o $k \in \mathbb{N}$, $g_k \in L(\mathbb{R})$ pois trata-se de um prolongamento por 0 ao complementar de $[-k, k]$ de uma função integrável à Riemann em $[-k, k]$ e

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_k = \lim_{k\to\infty} \int_{-k}^{k} g(t)\, dt = \lim_{k\to\infty} \operatorname{arctg}(k) - \operatorname{arctg}(-k) = \pi$$

o que permite aplicar o teorema da convergência monótona para obter que

Teorema da convergência monótona [Mag96, 41]

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \pi.$$

Isto torna plausível tentar provar que o cálculo possa ser feito por troca entre o limite e o integral. Para tal notamos que se $f_k(t) = \frac{e^{-(t/k)^2}}{1+t^2}$ cada f_k é contínuo logo mensurável em $\mathbb{R}$. Além disso temos $f_k \leq g$ com g integrável donde cada $f_k \in L(\mathbb{R})$. Como $f_k \leq f_{k+1}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, uma nova aplicação do teorema da convergência monótona permite obter que efectivamente

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(t/k)^2}}{1+t^2}\, dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \pi.$$

b) Temos que $\lim_{k\to\infty} \frac{e^{-(t/k)^2}}{1+|t|} = \frac{1}{1+|t|}$ para todo o $t \in \mathbb{R}$. A função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(t) = \frac{1}{1+|t|}$ não é integrável em $\mathbb{R}$ pois se fosse integrável definindo para cada $k \in \mathbb{N}$

$$h_k(t) = \begin{cases} h(t), & \text{se } t \in [-k, k], \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

teríamos

$$\int_{\mathbb{R}} h \geq \int_{\mathbb{R}} h_k \geq \int_{-k}^{k} \frac{1}{1+|t|}\, dt = 2\log k \to \infty$$

quando $k \to \infty$ o que contradiz ser h integrável. Isto torna plausível tentar provar que o limite é $+\infty$. Com efeito, se fosse finito, poderíamos aplicar o teorema da convergência monótona de forma análoga ao que se fez na alínea anterior para concluir que h era uma função integrável em $\mathbb{R}$ o que, como já vimos, é falso.

Teorema da convergência monótona [Mag96, 41]

8 *Calcule justificadamente*

$$\lim_{k\to+\infty, k\in\mathbb{N}} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\cos^k(xy)}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$$

Resolução. O limite pontual da função integranda quando $k \to \infty$ é 0 excepto se $xy = j\pi$ com $j \in \mathbb{Z}$. A equação $xy = j\pi$ com j fixo define uma hipérbole ou a união dos eixos coordenados que são subconjuntos com medida bidimensional nula do plano (no caso $j \neq 0$ pode ser expresso como a união de dois gráficos de funções contínuas definidas em intervalos abertos de $\mathbb{R}$ e com valores em $\mathbb{R}$). Assim a união numerável

$$\cup_{j\in\mathbb{Z}} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = j\pi\right\}$$

é um conjunto com medida de Lebesgue nula. Daí ser razoável tentar provar que o limite é 0 por aplicação do teorema da convergência dominada . Para tal basta mostrar que cada função integranda é mensurável e que existe uma função integrável em $\mathbb{R}^2$ que majora o módulo de todas as funções integrandas. A mensurabilidade de todas as funções integrandas segue de todas serem contínuas no aberto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Finalmente

Teorema da convergência dominada [Mag96, 46]

$$\left| \frac{\cos^k(xy)}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{1}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

e afirmamos que a última expressão define uma função integrável em $\mathbb{R}^2$. Com efeito, utilizando coordenadas polares , o critério de Tonelli e o teorema de Fubini obtém-se que

Teorema de mudança de variáveis [Mag96, 73] Teorema de Tonelli [Mag96, 68] Teorema de Fubini [Mag96, 67]

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\rho^2}\,d\rho \right) d\theta = 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\rho^2}\,d\rho = 2\pi^2$$

em que o último passo pode justificar-se como no exercício 7.a). Assim concluímos que

$$\lim_{k\to+\infty, k\in\mathbb{N}} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\cos^k(xy)}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = 0.$$

9 *Sejam $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função integrável e limitada em $\mathbb{R}$ e considere $H(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} g(\frac{t}{1+e^{-x^2}})\,dt$. Mostre que:*

a) H está bem definida em $\mathbb{R}$.

b) Se g fôr diferenciável com derivada limitada então H é diferenciável. Obtenha uma expressão integral para H' em termos de g'.

c) Mostre que a derivada de H existe mesmo que g não seja diferenciável. Obtenha uma expressão integral para H' em termos de g.

Resolução.

a) Como a função g é integrável em $\mathbb{R}$ também é mensurável. Decorre da definição de função mensurável que fixado $\lambda \in \mathbb{R}$ a função $t \mapsto g(\lambda t)$ também é mensurável em $\mathbb{R}$. Como a função $t \mapsto e^{-t^2}$ é contínua decorre que para cada $x \in \mathbb{R}$ a aplicação $t \mapsto e^{-t^2} g(\frac{t}{1+e^{-x^2}})$ é mensurável em $\mathbb{R}$. Como g é limitada existe uma constante $M > 0$ tal que $|e^{-t^2} g(\frac{t}{1+e^{-x^2}})| \leq Me^{-t^2}$. Da integrabilidade de $t \mapsto e^{-t^2}$ em $\mathbb{R}$ decorre que a função integranda é integrável para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Mensurabilidade [Mag96, 54-56]

b) Pretendemos aplicar a regra de Leibniz e justificar que a derivada existe para $x \in \mathbb{R}$ e

Regra de Leibniz [Mag96, 62]

$$H'(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} g'\left(\frac{t}{1+e^{-x^2}}\right) \frac{2txe^{-x^2}}{(1+e^{-x^2})^2}\, dt.$$

Para tal torna-se necessário mostrar que a função integranda na expressão anterior é mensurável e que existe uma função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a majora em módulo. A mensurabilidade decorre de um argumento análogo ao da alínea a) e a majoração pode ser

$$\left| e^{-t^2} g'\left(\frac{t}{1+e^{-x^2}}\right) \frac{2txe^{-x^2}}{(1+e^{-x^2})^2} \right| \leq C|t|e^{-t^2}$$

em que se utilizou ser g' limitada e o facto de $\frac{-2xe^{-x^2}}{(1+e^{-x^2})^2}$ ser uma função limitada. Que a função $F(t) = |t|e^{-t^2}$ é integrável em $\mathbb{R}$ decorre, por exemplo, do teorema da convergência monótona considerando

Teorema da convergência monótona [Mag96, 29]

$$F_k(t) = \begin{cases} F(t), & \text{se } t \in [-k, k] \\ 0, & \text{caso contrrio} \end{cases}$$

e notando que cada F_k é integrável, $F_k \leq F_{k+1}$ e

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} F_k(t)\, dt = \lim_{k\to\infty} \int_{-k}^{k} |t|e^{-t^2}\, dt =$$
$$= 2 \lim_{k\to\infty} \int_0^k te^{-t^2}\, dt = \lim_{k\to\infty} (-e^{-k^2} + 1) = 1.$$

c) O argumento da alínea anterior não é agora aplicável devido a g não ser diferenciável. É no entanto possível definir a mudança de variável $u = \frac{t}{1+e^{-x^2}}$ que dá a H a forma

$$H(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2(1+e^{-x^2})^2} (1+e^{-x^2}) g(u)\, du.$$

Para obter uma expressão integral para H' basta agora aplicar de novo a regra de Leibniz. Temos de forma análoga à da alínea anterior que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-u^2(1+e^{-x^2})^2}(1+e^{-x^2})g(u)\right) =$$
$$= g(u)\left(4xe^{-x^2}u^2(1+e^{-x^2})^2 e^{-u^2(1+e^{-x^2})^2} - 2xe^{-x^2}e^{-u^2(1+e^{-x^2})^2}\right)$$

pelo que existem $M, M' > 0$ tais que

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-u^2(1+e^{-x^2})^2}(1+e^{-x^2})g(u)\right)\right| \leq M(1+u^2)e^{-u^2} \leq M'e^{-u^2/2}.$$

Como o lado direito da última desigualdade é uma função integrável de u em $\mathbb{R}$ e da continuidade (logo mensurabilidade) da derivada decorre a aplicabilidade da regra de Leibniz e

$$H'(x) = 2xe^{-x^2} \int_{\mathbb{R}} g(u) e^{-u^2(1+e^{-x^2})^2} \left(2u^2(1+e^{-x^2})^2 - 1\right) du.$$

Comentário. *A ideia da resolução da alínea (c) é essencialmente a mesma que permite mostrar que a convolução de uma função $f \in L(\mathbb{R})$ como uma função $g \in C^1(\mathbb{R}) \cap L(\mathbb{R})$ com $g' \in L(\mathbb{R})$ é uma função de classe C^1 com $\frac{\partial (f*g)}{\partial x_i} = f * \frac{\partial g}{\partial x_i}$,* mesmo que f não seja diferenciável.

10 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função mensurável, $\lambda > 0$ e*

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}.$$

a) Mostre que E_λ é mensurável. **Sugestão***:*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(f(x)/\lambda)^{2k}}{(f(x)/\lambda)^{2k}+1}.$$

b) Suponha que $\int_{E_\lambda} 1 - \int_{E_{\lambda+1}} 1 \geq 1/(1+\lambda^2)$ para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$. Mostre que f não é integrável em $\mathbb{R}^n$.

Resolução.

a) O cálculo do limite incluído na sugestão conduz a uma função que iremos designar por g.

$$g(x) \equiv \lim_{k\to\infty} \frac{(f(x)/\lambda)^{2k}}{(f(x)/\lambda)^{2k}+1} = \begin{cases} 1, & \text{se } |f(x)| > \lambda, \\ 1/2, & \text{se } |f(x)| = \lambda, \\ 0, & \text{se } |f(x)| < \lambda. \end{cases}$$

Um conjunto é mensurável se a sua função característica fôr mensurável e sabemos que uma condição suficiente para uma função ser mensurável é ser o limite quase por toda a parte de uma sucessão de funções mensuráveis. O limite calculado não é a função característica de E_λ mas só difere dessa função se $|f(x)| = \lambda$. No entanto reutilizando uma vez mais o mesmo processo

Mensurabilidade [Mag96, 54-56]

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(3g(x)/2)^{2k}}{(3g(x)/2)^{2k}+1} = \begin{cases} 1, & \text{se } |g(x)| > 2/3, \\ 1/2, & \text{se } |g(x)| = 2/3, \\ 0, & \text{se } |g(x)| < 2/3. \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{se } |f(x)| > \lambda, \\ 0, & \text{se } |f(x)| < \lambda. \end{cases}$$

o que é exactamente a função característica de E_λ.

Finalmente notamos que uma função da forma $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \frac{(f(x)/\lambda)^{2k}}{(f(x)/\lambda)^{2k}+1}$ é mensurável pois se obtém por soma, produto e quociente de funções mensuráveis.

b)

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \geq \int_{\cup_{k=1}^{+\infty} E_k \setminus E_{k+1}} f = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{E_k \setminus E_{k+1}} f \geq$$
$$\geq \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{E_k \setminus E_{k+1}} k \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{1+k^2} = +\infty.$$

11 *Considere a transformação de coordenadas definida para $x > 0$ e $y > 0$ por*

$$\begin{cases} u = y^2/x \\ v = x^2/y \end{cases}$$

e a região $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y^2,\ x \leq y \leq 2x^2\}$. Use esta transformação de coordenadas para calcular o integral

$$\iint_A \frac{e^{-x^2/y}}{1 - x^2/y}\, dx\, dy. \tag{1}$$

Resolução. Seja $\psi : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0\} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\psi(x, y) = (y^2/x, x^2/y)$. Esta aplicação transforma arcos de parábolas de equação $y = cx^2$ ou $x = cy^2$ contidos no primeiro quadrante em semi-rectas horizontais ou verticais e a diagonal do primeiro quadrante na diagonal do primeiro quadrante. Em particular (ver fig. 5)

$$\psi(A) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \leq 1, u \geq v, v \geq 1/2\}.$$

A aplicação ψ é obviamente uma bijecção de classe C^1 com matriz jacobiana

Teorema de mudança de variáveis [Mag96, 73]

$$J_\psi(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(y^2/x) & \frac{\partial}{\partial y}(y^2/x) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x^2/y) & \frac{\partial}{\partial y}(x^2/y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \\ \frac{2x}{y} & \frac{-x^2}{y^2} \end{bmatrix}$$

cujo determinante é -3. Logo o módulo do determinante da transformação inversa é $1/3$. A aplicação da fórmula de mudança de variáveis na integração conduz a

$$\iint_{\psi(A)} \frac{e^v}{1 - v} \frac{1}{3}\, du\, dv = \tag{2}$$

$$= \frac{1}{3} \int_{1/2}^{1} \left(\int_v^1 \frac{e^v}{1 - v}\, du \right) dv = \tag{3}$$

$$= \frac{1}{3} \int_{1/2}^{1} e^v\, dv = \frac{1}{3}(e - e^{1/2}).$$

Nota-se que o facto do integral iterado (3) existir implica, pelo teorema de Tonelli, que o integral (2) existe e tem o mesmo valor e isto, pelo teorema de mudança de variáveis, que o integral (1) existe e tem o mesmo valor.

Teorema de Tonelli [Mag96, 68]

Comentário. *O outro integral iterado de (2) não permite efectuar o cálculo devido a dificuldades de primitivação.*

2.2 Variedades e integração em variedades

12 *Seja*

$$Z = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (z - x^2 - y^2)(y - x^2 - z^2) = 0\right\}.$$

Identifique uma variedade diferenciável bidimensional desconexa S e uma variedade diferenciável unidimensional conexa e compacta L tais que $Z = S \cup L$. Justifique as afirmações anteriores relativas a conectividade, compacidade e ao facto de S e L serem variedades. Decida justificadamente se Z é ou não uma variedade diferenciável. Calcule o espaço normal a L no ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

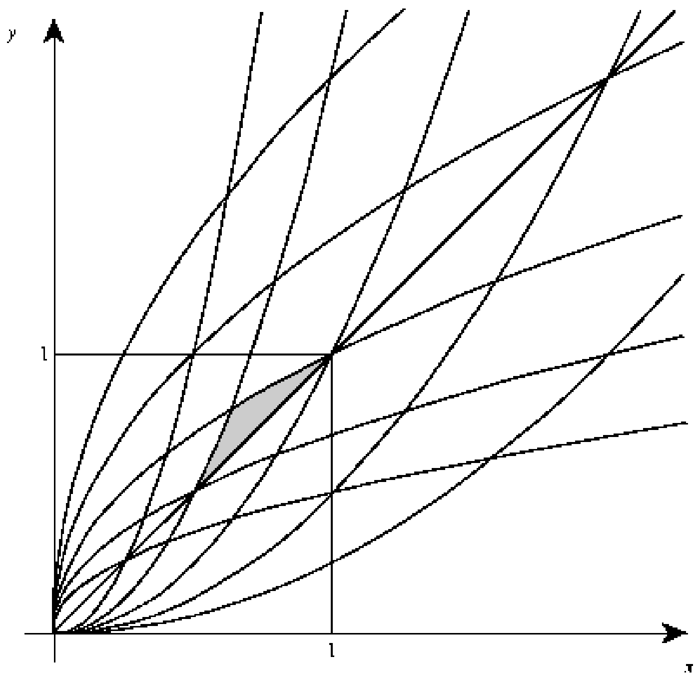

Figura 5: A região de integração e o novo sistema de coordenadas no problema 11

Resolução. Z consiste na união de dois parabolóides com equações $z = x^2 + y^2$ e $y = x^2 + z^2$. Vamos mostrar que L é a intersecção destes dois parabolóides e $S = Z \setminus L$. Mais precisamente, no que diz respeito a L, afirma-se que

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ y = x^2 + z^2 \end{cases}$$

define uma variedade unidimensional, conexa e compacta, L. Que se trata de uma variedade unidimensional decorre da intersecção dos dois parabolóides ser obviamente não vazia ($(0,0,0)$ pertence a L) e da aplicação C^1 definida por $\mathbb{R}^2 \ni (x,y,z) \mapsto (z - x^2 - y^2, y - x^2 - z^2)$ possuir a matriz jacobiana

Variedades diferenciais [Mag93, 40]

$$\begin{bmatrix} -2x & -2y & 1 \\ -2x & 1 & -2z \end{bmatrix} \tag{4}$$

cujos subdeterminantes são $-2x(1+2y)$, $-2x(1+2z)$, $4yz-1$. Da definição de L decorre que $y \geq 0$, $z \geq 0$ pelo que o anulamento simultâneo dos 3 subdeterminantes implicaria $x = 0$ e $4yz = 1$. A primeira destas condições e a definição de L implicam $z = z^4$, $y = y^4$ o que não é compatível com $4yz = 1$. Assim a matriz jacobiana tem característica máxima, 2, e L é uma variedade-1. Como o conjunto de zeros de uma aplicação contínua é um conjunto fechado obtemos que L é um conjunto fechado. Então, para mostrar que L é compacto, basta provar que é limitado. Notando que da definição de L decorre que para $z \neq 0$

$$1 = \frac{x^2+y^2}{|z|} \geq \frac{y^2}{|z|} = \frac{(x^2+z^2)^2}{|z|} \geq |z|^3$$

pelo que a cota z dos pontos de L é limitada. Como da definição de L também decorre $x^2 \leq |z|$ e $y^2 \leq |z|$ obtemos que L é limitado. Para provar que L é conexo mostramos que L é conexo por arcos. Para isso construímos uma parametrização de L. Da definição de L decorre que $z - y = y^2 - z^2$ donde $(z-y)(1+z+y) = 0$. Como z e y são não negativos podemos concluir que L está contido no plano $z = y$. Escrevemos $\lambda = z = y$ e utilizamos a definição de L para escrever $\lambda = x^2 + \lambda^2$ que é equivalente a $(\lambda - 1/2)^2 + x^2 = 1/4$ a equação de uma circunferência. Isto sugere considerar

Conjuntos conexos [Mag93, 31]

$$\begin{cases} x = & \frac{1}{2}\cos t \\ y = & \frac{1}{2}\operatorname{sen} t + \frac{1}{2} \\ z = & \frac{1}{2}\operatorname{sen} t + \frac{1}{2} \end{cases}$$

com $t \in [0, 2\pi]$. Provamos que L é conexo e adicionalmente identificamos L como sendo uma elipse contida no plano $y = z$ que se projecta no plano xy segundo a circunferência $(y-1/2)^2 + x^2 = 1/4$ e no plano yz segundo a circunferência $(z-1/2)^2 + x^2 = 1/4$.

Vamos agora provar que $S = Z \setminus L$ é uma variedade-2 desconexa. Que é desconexa decorre em poder decompor-se em duas componentes não vazias correspondentes aos semi-espaços definidos por $z > y$ e $y > z$ respectivamente (todos os pontos de intersecção com o plano $y = z$ estão em L). Que se trata de uma variedade-2 decorre de numa vizinhança suficientemente pequena de cada ponto de S os pontos de S serem os de um dos parabolóides $z = x^2 + y^2$ ou $y = x^2 + z^2$ e cada um destes parabolóides ser uma variedade-2.

O espaço normal a L no ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ é gerado pelos vectores linha da matriz (4), isto é,

$$N_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(L) = \\ = \{(v_1,v_2,v_3) \in \mathbb{R}^3 : (v_1,v_2,v_3) = \alpha(-1,-1,1) + \beta(-1,1,-1); \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \tag{5}$$

Comentário. *A resolução anterior não inclui quaisquer esboços. Obviamente que todos os cálculos apresentados se tornam bastante mais naturais se se esboçar Z.*

13 *Sejam V_1 e V_2 duas variedades $n-1$ dimensionais em $\mathbb{R}^n$. Mostre que se $x_0 \in V_1 \cap V_2$ é tal que os espaços normais, relativos a cada uma das variedades, não são idênticos então existe uma vizinhança W de x_0 tal que $V_1 \cap V_2 \cap W$ é uma variedade $n-2$ dimensional. Mostre que se os espaços normais coincidirem então podemos ter $V_1 \cap V_2 = \{x_0\}$.*

Resolução. Devido a cada V_i ser uma variedade existem abertos W_i e funções $F_i : W_i \to \mathbb{R}$ com $i = 1, 2$, tais que $x_0 \in W_1 \cap W_2$, cada $F_i \in C^1(W_i)$, $V_i \cap W_i = \{x \in W_i : F_i(x) = 0\}$ e $\nabla F_i(x_0) \neq 0$. Se tomarmos $U = W_1 \cap W_2$ e $F : U \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x) = (F_1(x), F_2(x))$ temos que U é aberto, $U \cap V_1 \cap V_2 = W_1 \cap W_2 \cap V_1 \cap V_2 = \{x \in U : F(x) = 0\}$ e a matriz jacobiana de F tem a forma

$$\begin{bmatrix} \nabla F_1(x) \\ \nabla F_2(x) \end{bmatrix}.$$

As linhas desta matriz geram os espaços normais a V_1 e V_2 respectivamente que, em x_0, não são coincidentes. Isto quer dizer que, naquele ponto, as duas linhas da matriz são linearmente independentes. Podemos escolher, por continuidade das derivadas parciais de F, uma vizinhança W de x_0 contida em U em que a independência linear se verifica em todos os pontos de $W \cap V_1 \cap V_2$. O conjunto $W \cap V_1 \cap V_2$ é então uma variedade $n-2$ dimensional. Espaços tangente e normal [Mag93, 54]

Se os espaços normais coincidirem a intersecção pode reduzir-se a um ponto qualquer que seja a dimensão n. Tome-se, por exemplo, $V_1 = \{x = (x_i)_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$, $V_2 = \{x = (x_i)_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^n : x_1 = \sum_{i=2}^n x_i^2\}$, $x_0 = 0$.

14 *Considere um campo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por*

$$F(x, y) = \left(\frac{3x^2y^3}{x^6 + y^6}, -\frac{3x^3y^2}{x^6 + y^6} \right).$$

a) Calcule o integral de linha

$$\int_L F \cdot dr$$

nos seguintes casos:

a.1) L a linha definida pelo caminho $r(t) = \left(\cos^{1/3} t, \operatorname{sen}^{1/3} t\right)$ com $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

a.2) L o segmento de recta orientado unindo $(1, 0)$ a $(0, 1)$.

b) Decida se F é ou não um gradiente de um potencial em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Resolução.

a.1) Calculamos directamente o integral de linha notando que Integrais de linha [Mag93, 15]

$$r'(t) = \frac{1}{3} \left(-\cos^{-2/3} t \operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^{-2/3} t \cos t \right),$$

$$F(\cos^{1/3} t, \operatorname{sen}^{1/3} t) = \left(3 \cos^{2/3} t \operatorname{sen} t, 3 \cos t \operatorname{sen}^{2/3} t \right),$$

pelo que

$$\int_L F \cdot dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dt = \frac{\pi}{2}.$$

a.2) Investigamos a possibilidade do integral de linha do campo F ser independente do caminho. Para isso verificamos se F é ou não um campo fechado

Campos gradiente [Mag93, 24, 136]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{3x^3y^2}{x^6+y^6}\right) = -\frac{9x^2y^2(x^6+y^6)-18x^8y^2}{(x^6+y^6)^2} = \frac{9(x^8y^2-x^2y^8)}{(x^6+y^6)^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3x^2y^3}{x^6+y^6}\right)$$

pelo que F é fechado em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Como este conjunto não é simplesmente conexo não temos à nossa disposição uma condição suficiente que nos garanta que F é um gradiente. No entanto podemos recorrer, por exemplo, ao subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ definido por $x + y > 1/2$, este sim simplesmente conexo, para garantir que os valores dos integrais de linha na alínea a.1) e a.2) são idênticos.

b) Considere-se a linha C parametrizada por $\alpha(t) = \left(\cos^{1/3} t, \operatorname{sen}^{1/3} t\right)$ com $t \in [0, 2\pi]$. Um cálculo análogo ao realizado na alínea a.1) conduz a

$$\int_C F \cdot d\alpha = 2\pi$$

pelo que F **não** é um gradiente em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

15 *Considere um campo $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por*

$$G(x,y,z) = (yze^{x^2+z^2}, xze^{x^2+y^2}, xye^{y^2+z^2}).$$

Calcule o fluxo do rotacional do campo G através da variedade-2 S definida por

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}.$$

Arbitre o sentido da normal a S.

Resolução. Utilizamos o teorema de Stokes para transformar o fluxo do rotacional num integral de linha do campo sobre o bordo de S, ∂S. Orientações compatíveis da normal unitária a S e do sentido em que se percorre ∂S para cálculo do integral de linha estão esquematizados na figura 6. O bordo de S é formado por 3 arcos de circunferência cada um dos quais sobre um plano coordenado. Se T designar um vector tangente ao bordo temos $G(x,y,0) \cdot T(x,y,0) = G(x,0,z) \cdot T(x,0,z) = G(0,y,z) \cdot T(0,y,z) = 0$ nos pontos em que T está definido pelo que

$$\int_S \operatorname{rot} G \cdot \nu \, dS = \oint_{\partial S} G \cdot dr = 0.$$

Comentário. *Uma das muitas aplicações do teorema fundamental do cálculo ou de um dos seus corolários (neste caso o teorema de Stokes), porventura a mais elementar, consiste em calcular um dos lados da igualdade estabelecida no teorema usando o cálculo do integral no outro lado da igualdade sempre que tal se afigure mais simples. Quando é que se deve ou não tirar partido desta possibilidade é algo que só alguma prática permite responder.*

Teorema de Stokes [Mag93, 118]

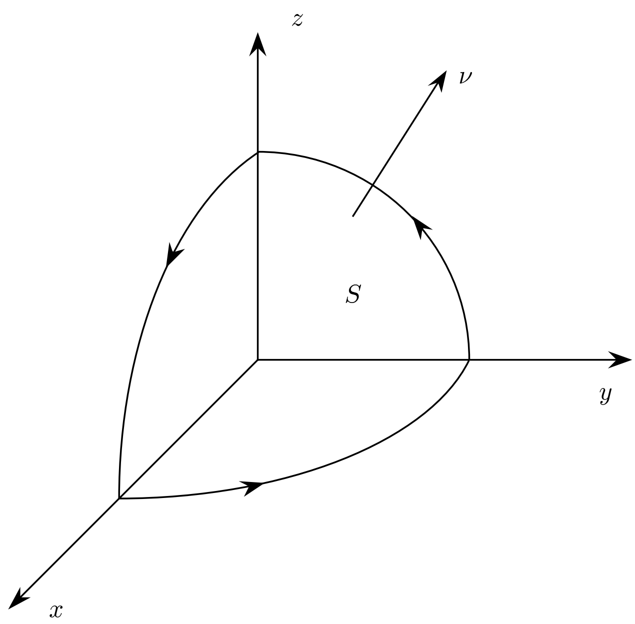

Figura 6: Esta figura acompanha o problema 15

16 Considere a região $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0, 0 \leq z \leq 1\}$ e um campo $H : D \to \mathbb{R}$ definido por $H(x, y, z) = x + yze^{y-z}$. Calcule

$$\iint_{\partial D} H\nu_1 \, dS$$

em que $\nu \equiv (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ é a normal unitária exterior a ∂D, a fronteira de D, nos pontos em que está definida e dS designa o elemento de volume bidimensional.

Resolução. O integral a calcular pode ser interpretado como o fluxo de um campo vectorial $\overline{H}(x, y, z) = (H(x, y, z), 0, 0)$ atrvés de ∂D. Isto permite usar o teorema da divergência para calcular

Teorema da divergência [Mag93, 104]

$$\iint_{\partial D} H\nu_1 \, dS = \iint_{\partial D} \overline{H} \cdot \nu \, dS = \iiint_D \operatorname{div} \overline{H} \, dx \, dy \, dz = \iiint_D \frac{\partial H}{\partial x_1} \, dx \, dy \, dz$$
$$= \iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz = \frac{\pi}{2}.$$

Comentário. *O tema deste exercício é análogo ao do exercício 15. O teorema da divergência é usado para simplificar consideravelmente o cálculo.*

17 Sejam $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$, $T : S^2 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Suponha-se que T é uma aplicação contínua e que $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Para $x \in \mathbb{R}^3$, $\nu \in S^2$, $h, r > 0$ considere todos os conjuntos da forma

$$C_{x,\nu,h,r} = \{y \in \mathbb{R}^3 : |(y - x) \cdot \nu| \leq h,\ |y - x - ((y - x) \cdot \nu)\nu| \leq r\},$$

isto é, todos os "cilindros" centrados em x, eixo de simetria ν, altura $2h$ e raio da base r. Mostre que se para qualquer destes cilindros tivermos

$$\iint_{\partial C_{x,\nu,h,r}} T(n,y)\cdot n(y)\,dV_2(y) = \iint_{\partial C_{x,\nu,h,r}} g(y)\cdot n(y)\,dV_2(y),$$

com $\partial C_{x,\nu,h,r}$ a fronteira do cilindro e $n(y)$ a respectiva normal exterior nos pontos em que está definida, então $T(-n,x)\cdot n = -T(n,x)\cdot n$ para todo o $n \in S^2$ e todo o $x \in \mathbb{R}^3$.

Resolução. A aplicação do teorema da divergência ao integral envolvendo g em cada um dos cilindros $C_{x,\nu,h,r}$ conduz à identidade

$$\iint_{\partial C_{x,\nu,h,r}} T(n,y)\cdot n(y)\,dV_2(y) = \iiint_{C_{x,\nu,h,r}} \operatorname{div} g(y)\,dy. \tag{6}$$

Convencionamos

$$\begin{aligned} D^+_{x,\nu,h,r} &= \{y \in \mathbb{R}^3 : (y-x)\cdot\nu = h,\ |y-x-((y-x)\cdot\nu)\nu| \le r\},\\ D^-_{x,\nu,h,r} &= \{y \in \mathbb{R}^3 : (y-x)\cdot\nu = -h,\ |y-x-((y-x)\cdot\nu)\nu| \le r\},\\ S_{x,\nu,h,r} &= \{y \in \mathbb{R}^3 : |(y-x)\cdot\nu| \le h, |y-x-((y-x)\cdot\nu)\nu| = r\}. \end{aligned}$$

Se fizermos $r \to 0$ notamos que, usando a continuidade de T, um argumento análogo ao do lema de localização garante que

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint_{D^+_{x,\nu,h,r}} T(n,y)\cdot n(y)\,dV_2(y) = T(\nu,x)\cdot\nu,$$
$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint_{D^-_{x,\nu,h,r}} T(n,y)\cdot n(y)\,dV_2(y) = -T(-\nu,x)\cdot\nu.$$

Por outro lado escolhemos $h = r^3$ e consideramos $y \in B_1(x), n \in S^2$. As funções T e $\operatorname{div} g$ são limitadas para y e n satisfazendo as restrições anteriores. Tal é uma consequência de S^2 e $\overline{B}_1(x)$ serem compactos, T ser contínua e g ser de classe C^1. Assim podemos estabelecer para uma constante conveniente $C > 0$

$$\left|\iint_{S_{x,\nu,h,r}} T(n,y)\cdot n(y)\,dV_2(y)\right| \le Cr^3$$
$$\left|\iiint_{C_{x,\nu,h,r}} \operatorname{div} g(y)\,dy\right| \le Cr^5$$

Assim dividindo ambos os membros de (6) por r^2 e fazendo $r \to 0$ obtém-se a identidade desejada.

Comentário. *O argumento utilizado, baseado na ideia do lema de localização e usando diferentes "taxas de variação" da altura e raio da base do cilindro, é inspirado por aplicações de procedimentos análogos em Mecânica dos Meios Contínuos, Electromagnetismo, ..., em que se obtêm restrições a certos campos à custa das leis de conservação por eles satisfeitas, quer na forma de equações diferenciais parciais quer de relações algébricas. Comparar com [Mag93, 150-154].*

Lema de localização [Mag93, 108]

18 *Decida se o campo* $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ *definido por*

$$F(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+2xy+2y^2}, \frac{-x}{x^2+2xy+2y^2}\right)$$

é ou não um gradiente em

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$.

b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Resolução.

a) O semiplano superior $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ é um conjunto aberto em estrela e o campo é de classe C^1 de maneira que basta verificar se o campo é ou não fechado. Isso resulta de

Campos gradiente [Mag93, 24, 136]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+2xy+2y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+2xy+2y^2}\right).$$

b) Como $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ não é um conjunto em estrela não podemos aplicar o critério usado na alínea anterior. Testamos o integral ao longo de um caminho fechado que limite uma região contendo a origem para investigarmos o que se passa. Consideramos então um exemplo particularmente simples de uma tal linha. Seja $r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$ definindo uma linha L. Temos então

$$\begin{aligned}\oint_L F \cdot dr &= \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-\operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t}{\cos^2 t + 2\cos t \operatorname{sen} t + 2\operatorname{sen}^2 t}\, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-1}{(\cos t + \operatorname{sen} t)^2 + \operatorname{sen}^2 t}\, dt < 0.\end{aligned}$$

Se o campo fosse um gradiente no conjunto em consideração o integral deveria ser 0 pelo que podemos concluir que o campo não é gradiente.

Comentário. *Poderia ter-se invocado a noção de conjunto* simplesmente conexo *na alínea (a) e o resultado análogo para esta classe de conjuntos. Claro que* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *não é simplesmente conexo.*

Referências

[Agu73] F. Dias Agudo. *Lições de Análise Infinitesimal*, volume II. Cálculo integral em $\mathbb{R}^n$. Escolar Editora, Lisboa, 1973.

[Apo69] Tom M. Apostol. *Calculus*, volume II. John Wiley, New York, 1969.

[Apo74] Tom M. Apostol. *Mathematical Analysis*. Addison-Wesley, New York, 1974.

[Gir96] Pedro Girão. *Resoluções de Exames de Análise Matemática III*. IST, 1996.

[Mag93] Luís Magalhães. *Integração em Variedades e Aplicações*. Texto Editora, Lisboa, 1993.

[Mag96] Luís Magalhães. *Integrais Múltiplos*. Texto Editora, Lisboa, segunda edição, 1996.

[SG97] João Santos e Diogo Gomes. *Problemas de Análise Matemática*. IST, 1997.

Índice