



Análise Matemática IV

Esboço de resolução do 1º Teste

6 de Maio de 2000

Engenharia Electrotécnica (excepto Telecomunicações) e
Engenharia de Gestão Industrial

1. (a) Uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é da forma

$$f(x + iy) = \varphi(x^2 - y^2) + i\psi(xy), \quad \text{com } x, y \in \mathbb{R},$$

em que φ e ψ são funções reais de variável real diferenciáveis. Mostre que se f é holomorfa φ e ψ devem ter derivadas constantes e aproveite para determinar todos os possíveis f .

Esboço de resolução. As equações de Cauchy-Riemann para uma tal função f reduzem-se ao sistema

$$\begin{cases} 2x\varphi'(x^2 - y^2) = x\psi'(xy), \\ -2y\varphi'(x^2 - y^2) = -y\psi'(xy). \end{cases}$$

Considerando pontos sobre a recta definida por $y = x$ as equações conduzem a $2\varphi'(0) = \psi'(x^2)$ se $x \neq 0$. Como x na igualdade anterior é um qualquer número não nulo concluímos que a derivada de ψ tem que ser constante (e igual a $2\varphi'(0)$) quando o seu argumento é positivo. De forma análoga considerando $y = -x$ chega-se à conclusão que a derivada de ψ tem de ser constante quando o seu argumento é negativo. Uma tal função tem de ter derivada constante por toda a parte (caso contrário não é diferenciável na origem). O mesmo argumento usando as rectas $y = 0$ e $x = 0$ conduz à conclusão que a derivada de φ é constante.

Assim φ e ψ correspondem a produtos por números reais. Designemo-los por α e β respectivamente. As condições de Cauchy-Riemann reduzem-se agora a

$$\begin{cases} 2x\alpha = x\beta, \\ -2y\alpha = y\beta. \end{cases}$$

pelo que devemos ter $\beta = 2\alpha$. Assim $f(z) = \alpha(x^2 - y^2) + i2\alpha xy = \alpha z^2$ com $z = x + iy$.

- (b) Seja $R > 0$. Considere o integral

$$I(R) \equiv \oint_{L_R} \frac{e^z}{z^3 + 1} dz$$

em que L_R designa a linha definida pelo caminho

$$z(t) = \begin{cases} Re^{-t/\pi + it}, & \text{para } t \in [0, 2\pi], \\ R[(t - 2\pi)(1 - e^{-2}) + e^{-2}], & \text{para } t \in [2\pi, 2\pi + 1]. \end{cases}$$

Determine $I(R)$ nos casos em que as singularidades da função integranda não se encontram sobre L_R .

Esboço de resolução. A linha L_R é formada por um “arco de espiral” e um segmento de recta. Um esboço da linha, para um certo valor de R , aparece na figura 1. O efeito do parâmetro R é ampliar (ou reduzir) a linha L_1 através de uma homotetia de razão R . Como a função integranda tem singularidades nas três raízes cúbicas de -1 , que são -1 , $e^{i\pi/3}$ e $e^{i5\pi/3}$, temos de investigar para que valores de R os pontos de L_R com argumentos $\pi/3$, π e $5\pi/3$ têm módulo 1. Isto ocorre respectivamente se $Re^{-1/3} = 1$, $Re^{-1} = 1$ e $Re^{-5/3} = 1$. Portanto:

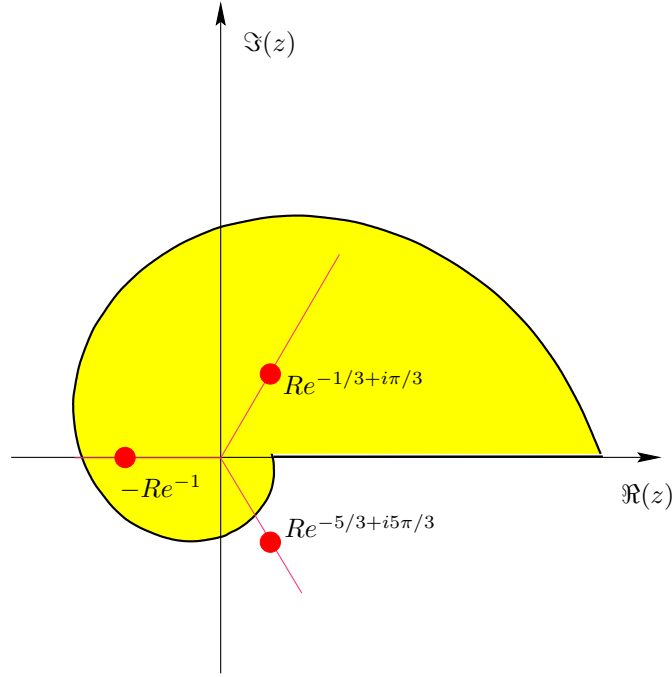


Figura 1: Um esboço da região limitada por L_R . As singularidades da função deverão estar sobre as semi-rectas sugeridas pelos segmentos a vermelho. Ilustra-se uma possível posição das singularidades com os 3 círculos vermelhos.

- Se $R > e^{5/3}$ todas as singularidades estão na região limitada por L_R ;
- Se $e^{5/3} > R > e$ então -1 e $e^{i\pi/3}$ estão na região limitada por L_R ;
- Se $e > R > e^{1/3}$ então -1 está na região limitada por L_R ;
- Se $R < e^{1/3}$ então não há singularidades na região limitada por L_R .

Como a exponencial não se anula é fácil verificar que cada uma das singularidades é um pólo de primeira ordem. Os resíduos c_1 , c_2 e c_3 , repectivamente em $e^{i\pi/3}$, -1 e $e^{i5\pi/3}$, da função integranda são

$$c_1 = \frac{e^{e^{i\pi/3}}}{(e^{i\pi/3} + 1)(e^{i\pi/3} - e^{5i\pi/3})}$$

$$c_2 = \frac{e^{-1}}{(-1 - e^{i\pi/3})(-1 - e^{5i\pi/3})}$$

$$c_3 = \frac{e^{e^{5i\pi/3}}}{(e^{5i\pi/3} - e^{i\pi/3})(e^{5i\pi/3} + 1)}$$

Assim

- Se $R > e^{5/3}$ o integral iguala $2\pi i(c_1 + c_2 + c_3)$;
- Se $e^{5/3} > R > e$ o integral iguala $2\pi i(c_1 + c_2)$;
- Se $e > R > e^{1/3}$ o integral iguala $2\pi i c_1$;
- Se $0 < R < e^{1/3}$ o integral é 0.

- (c) Seja $\rho > 0$. Considere as linhas fechadas que se obtêm percorrendo o segmento de recta unindo $-i\rho$ a $i\rho$ e uma das semi-circunferências centradas em 0 e raio ρ contidas em

cada um dos semiplanos $\Re(z) \geq 0$ e $\Re(z) \leq 0$. Designe essas linhas, percorridas “uma vez no sentido directo”, por C_ρ^+ e C_ρ^- . Para $\rho > 1$ calcule

$$\oint_{C_\rho^+} \frac{e^z}{(z^2 - 1)^2} dz \quad \text{e} \quad \oint_{C_\rho^-} \frac{e^z}{(z^2 - 1)^2} dz$$

e utilize um desses cálculos para obter o valor de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos y}{(y^2 + 1)^2} dy.$$

Esboço de resolução. As linhas C_ρ^+ e C_ρ^- estão esquematizadas na figura 2. Usando

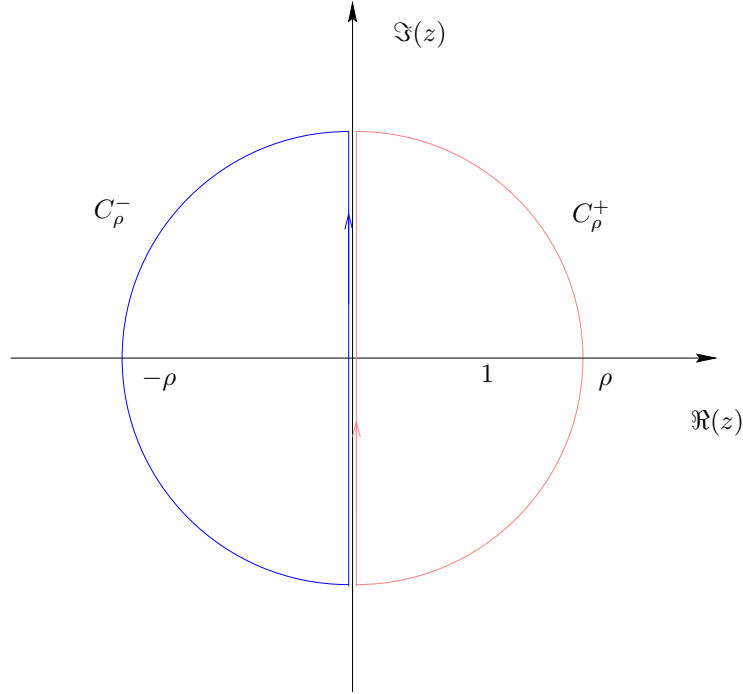


Figura 2: As linhas C_ρ^+ e C_ρ^- .

o teorema dos resíduos obtemos

$$\begin{aligned} \oint_{C_\rho^+} \frac{e^z}{(z^2 - 1)^2} dz &= -2\pi i \left(\frac{d}{dz} \left(\frac{e^z}{(z + 1)^2} \right) \right) \Big|_{z=1} = 0, \\ \oint_{C_\rho^-} \frac{e^z}{(z^2 - 1)^2} dz &= 2\pi i \left(\frac{d}{dz} \left(\frac{e^z}{(z - 1)^2} \right) \right) \Big|_{z=-1} = \pi i. \end{aligned}$$

Como a exponencial é limitada no semiplano esquerdo ($|e^z = e^x(\cos y + i \sen y)| \leq 1$ se $x \leq 0$) podemos usar o segundo (mas não o primeiro) destes integrais para calcular

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos y}{(y^2 + 1)^2} dy &= \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{-\rho}^{+\rho} \frac{\cos y}{(y^2 + 1)^2} dy = \frac{1}{i} \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{L_\rho} \frac{e^z}{(z^2 - 1)^2} dz \\ &= \frac{1}{i} \left(\pi i - \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{S_\rho} \frac{e^z}{(z^2 - 1)^2} dz \right) = \pi \end{aligned}$$

em que S_ρ^- designa a semicircunferência e L_ρ^- o segmento de recta que formam C_ρ^- . O facto do limite quando $\rho \rightarrow +\infty$ do integral sobre S_ρ ser 0 decorre da função integranda ser majorável no semi-plano esquerdo¹ por $\frac{1}{\rho^2-1}$ e S_ρ ter comprimento $\pi\rho$.

- (d) Decida se existe ou não uma função holomorfa $h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ com uma singularidade essencial em 0 e tal que

$$\oint_\gamma z^j h(z) dz = \begin{cases} 0, & \text{se } j < -1, \\ \frac{2\pi i}{(j+1)!} & \text{se } j \geq -1. \end{cases}$$

em que $j \in \mathbb{Z}$ e γ é uma qualquer circunferência centrada em 0 percorrida “uma vez no sentido directo”.

Esboço de resolução. Admitindo que tal função existe o respectivo desenvolvimento em série de Laurent seria da forma

$$h(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k.$$

Admitindo temporariamente que podemos permutar a série com o integral teríamos

$$\oint_\gamma z^j h(z) dz = \oint_\gamma \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^{j+k} dz = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \oint_\gamma c_k z^{j+k} dz = 2\pi i c_{-1-j}.$$

Daí que o candidato a função h deverá satisfazer

$$c_{-j-1} = \begin{cases} 0, & \text{se } j < -1 \\ \frac{1}{(j+1)!}, & \text{se } j \geq -1 \end{cases}$$

ou seja

$$h(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots = e^{1/z}.$$

Esta função de facto satisfaz todas as propriedades desejadas².

2. Considere uma equação diferencial da forma $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$.

- (a) Determine em que circunstâncias uma tal equação diferencial possui um factor integrante só dependente do produto xy .
 (b) Aproveite o resultado anterior para determinar uma solução de

$$\begin{cases} y - \frac{y^2}{x} + (x + y)y' = 0, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Esboço de resolução. Um tal factor integrante pode escrever-se na forma $\mu(xy)$ para uma função μ . Então o facto de multiplicando ambos os membros da equação por este factor a transformar em exacta garante que

$$\frac{\partial}{\partial y} (\mu(xy)M(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x} (\mu(xy)N(x, y))$$

Expandindo as derivadas parciais obtém-se da igualdade anterior

$$x\mu'(xy)M(x, y) + \mu(xy)\frac{\partial M}{\partial y} = y\mu'(xy)N(x, y) + \mu(xy)\frac{\partial N}{\partial x}$$

¹O raciocínio análogo não pode ser efectuado com C_ρ^+ devido à exponencial não ser limitada no semiplano direito.

²A priori não poderíamos afirmar que a série de Laurent que obtemos formalmente fosse válida em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

pelo que

$$\frac{\mu'(xy)}{\mu(xy)} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{xM(x, y) - yN(x, y)}.$$

Daí que o segundo membro deverá ser uma função de xy . Se a designarmos por $\phi(xy)$ e escrevendo $w = xy$ poderemos obter μ resolvendo a equação diferencial ordinária de primeira ordem $\mu'(w) = \mu(w)\phi(w)$.

No exemplo da alínea (b) temos

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{yN(x, y) - xM(x, y)} = \frac{1 - 1 + 2y/x}{x(y - y^2/x) - y(x + y)} = \frac{2y/x}{-2y^2} = -\frac{1}{xy}.$$

pelo que μ se pode-se obter de $\mu'(w) = -\mu(w)/w$. Um tal μ é $\mu(w) = 1/w$ e podemos usar $1/xy$ como factor integrante.

Então a equação diferencial

$$\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2} + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right) y' = 0$$

é exacta e equivalente à dada numa vizinhança de $(1, 1)$. Para a resolver consideramos a determinação de um potencial P para um campo cujas componentes sejam M e N numa vizinhança de $(1, 1)$. Este deverá satisfazer

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \int \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2} dx + g_1(y) = \log x + \frac{y}{x} + g_1(y), \\ P(x, y) &= \int \frac{1}{y} + \frac{1}{x} dy + g_2(x) = \log y + \frac{y}{x} + g_2(x). \end{aligned}$$

para algumas funções g_1 e g_2 . Comparando as duas expressões obtemos potenciais da forma $P(x, y) = \log(xy) + \frac{y}{x} + C$ para alguma constante C . Daí termos obtido soluções da equação diferencial definidas implicitamente por

$$\log(xy) + \frac{y}{x} = C.$$

Para verificarmos a condição inicial introduzimos nesta expressão $y = 1$ e $x = 1$ para obtermos uma solução particular definida por $\log(xy) + \frac{y}{x} = 1$.