Introdução às Equações Diferenciais Parciais

João Palhoto Matos

28 de Setembro de 2006

Índice

Nota

As páginas seguintes são uma versão mais cuidada das minhas notas para dois cursos introdutórios sobre equações diferenciais parciais leccionados a partir de 1989/90 no Instituto Superior Técnico. Estes cursos têm a duração de um semestre e têm como objectivos por um lado a introdução do aluno aos resultados clássicos sobre equações diferenciais parciais e por outro a ligação com métodos e problemas contemporâneos. Um dos cursos é destinado aos alunos do quarto ou quinto ano do curso de licenciatura em Matemática Aplicada e o outro aos alunos do primeiro ano do Mestrado em Matemática Aplicada.

É justo referir aqui que fui influenciado por todos os professores que me ensinaram Matemática, em particular por aqueles que me ensinaram Equações Diferenciais por escrito e ao vivo. Destes últimos devo salientar o Prof. Manuel Ricou que foi quem leccionou pela primeira vez este curso. No entanto o ordenamento do material, a ênfase relativa dada aos diversos tópicos e todos os erros matemáticos, linguísticos e tipográficos são da minha inteira responsabilidade. Desde já agradeço a quem mos comunicar.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Nomenclatura

A expressão

$$F(x, u, (D^\alpha u)_{1 \leq |\alpha| \leq l}) = 0 \tag{1.1}$$

em que[1] $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$ é uma aplicação dada e $k \equiv k(l, m, n, N)$ designa-se por *sistema de N equações diferenciais parciais* em m incógnitas u_j, $1 \leq j \leq m$ em que $u = (u_j)_{1 \leq j \leq m}$. Em geral os únicos sistemas que consideraremos serão *determinados*, i.e. $m = N$. Se $m = 1$ dizemos que temos uma *equação diferencial parcial*. Se, fixado um qualquer x, o funcional definido por $u \mapsto F(x, u(x), (D^\alpha u(x))_{1 \leq |\alpha| \leq l})$ é afim diz-se que a equação ou sistema é *linear*. Finalmente se

$$F(x, u, (D^\alpha u)_{1 \leq |\alpha| \leq l}) = \sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x, (D^\beta u)_{|\beta| < k}) D^\alpha u - b(x, (D^\beta u)_{|\beta| < k})$$

diz-se que o sistema ou equação é *quase-linear*.

1.2 Objectivos

A secção de texto anterior prima por ser, propositadamente, sintética. Dizer que uma equação diferencial parcial é uma expressão do tipo (1.1) é algo que não tem significado matemático preciso. O que é que de facto significa estudar uma equação diferencial parcial? Normalmente o leitor deste texto já terá sido exposto ao estudo de equações diferenciais ordinárias e de algumas equações diferenciais parciais[2]. Isto poderá ter levado a um conjunto de expectativas desajustadas do que se irá encontrar a seguir. O que iremos de facto encontrar será, espero, um vislumbre de resposta às seguintes questões:

- Existe uma teoria geral para equações diferenciais parciais?
- Caso a resposta à primeira pergunta seja não, existe um processo de classificação que reduza este estudo a um número finito e pequeno de teorias especiais?
- Quais são os métodos a utilizar? Trata-se de um campo da Matemática definido pelos métodos técnicos a utilizar ou pelos objectivos que se têm em vista?
- Há um espaço de funções natural para procurar soluções de uma equação?

[1] Não havendo menção expressa do contrário convenciona-se que notação da forma $f : D \to E$ significa que f está definida num subconjunto de D com valores em E. Por outro lado a notação $f : C \subset D \to E$ significa que f está definida em *todo* o subconjunto C de D com valores em E.

Claro que $k(l, m, n) = nm(\frac{1-n^l}{1-n})$.

[2] Provavelmente já usou separação de variáveis e séries de funções para obter soluções de algumas equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem em domínios particulares. Isto não será pressuposto no texto.

- O que é que as equações lineares têm de especial? Em que medida é que a teoria é mais rica nesta situação?
- O que é um problema bem posto?
- Em que medida a Física-Matemática clássica influencia e é influenciada pelo estudo das equações diferenciais parciais? Que soluções são interessantes deste ponto de vista?
- Há classes de equações diferenciais parciais cujo estudo possa beneficiar dos métodos desenvolvidos para equações diferenciais ordinárias?

A resposta a estas questões *não* vai ser fácil. Espero, pelo menos, que no final da leitura deste texto se pecebam melhor as perguntas e a dificuldade em formular a sua resposta.

Capítulo 2

Equações reais de primeira ordem

2.1 Introdução

Pretendem-se estudar equações da forma

$$F(x, u, (D_i u)_{1\leq i\leq n}) = 0. \tag{2.1}$$

em que $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma aplicação dada.

Note-se que o problema anterior não está enunciado em termos rigorosos e que introduziremos hipóteses precisas progressivamente. O leitor começará com certeza por pensar que se tivéssemos $n = 1$ estaríamos a estudar uma equação diferencial ordinária de primeira ordem e que nesse caso procurar-se-ia estudar:

- a existência (local ou global) de u;
- condições adicionais que garantam a unicidade de u;
- regularidade de u;
- outras propriedades de u tais como dependência contínua em relação a um parâmetro ou propriedades assimptóticas.

São essencialmente os mesmos problemas que nos interessarão no estudo das *equações diferenciais parciais*. No entanto, excepto no caso de equações diferenciais parciais reais de primeira ordem em que a análise reduz-se no essencial ao estudo dum sistema de *equações diferenciais ordinárias*, os métodos a utilizar irão para além do que é conhecido das equações ordinárias.

2.2 Equações quase-lineares

A equação diferencial parcial real quase-linear de primeira ordem tem a forma

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = b(x, u) \tag{2.2}$$

com $a \equiv (a_i)_{1\leq i\leq n}$ e b funções dadas. Procuraremos fixar uma solução considerando a *condição de Cauchy*

$$u = u_0, \quad \text{em } S, \tag{2.3}$$

onde S é uma hipersuperfície C^1. O problema assim formulado designa-se por *problema de Cauchy.* Note-se que podemos escrever a equação na forma

$$D_{a(x,u(x))}u(x) = b(x, u(x))$$

em que D_h designa derivada dirigida segundo o vector h. Isto é, conhecido o valor de u num ponto x existe uma direcção, dependente de x e $u(x)$, em que o "crescimento" de u é conhecido.

Essa direcção é a do campo $\Omega \ni x \mapsto a(x, u(x))$. Uma primeira observação é que poderá não existir solução do problema de Cauchy se existir um ponto de S em que $a(x, u(x))$ é tangente a S. Esta e outas observações importantes podem ser feitas mesmo num exemplo muito simples. Pode-se dizer que o método de resolução das equações quase-lineares de primeira ordem reduz-se no essencial ao exemplo seguinte por "mudança de variáveis".

Exemplo. *Considere-se* $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ *em* $\mathbb{R}^2$. *Para toda a função* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *temos que* $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$u(x, y) = g(y)$$

será uma solução. Note-se por exemplo que se S *for uma linha* C^1 *cuja tangente nunca seja paralela ao eixo dos* xx *o problema de Cauchy correspondente terá uma e uma só solução numa vizinhança de* S. *Por outro lado não existe por exemplo solução do problema de Cauchy se fixarmos* $u(x, 0) = h(x)$ *com* h *não constante. Se* h *for constante existirão soluções mas não se verificará unicidade local. Note-se que a derivada dirigida de* u *está neste caso fixada na direcção do eixo dos* xx. ▲

Voltando à equação quase-linear geral vamos como primeiro passo da sua resolução tentar determinar as linhas integrais do campo de direcções definido por $(x, u) \mapsto (a(x, u(x)), b(x, u(x)))$ em $\mathbb{R}^{n+1}$. Para tal basta considerar o sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\lambda} &= a(X(\lambda), U(\lambda)) \\ \frac{dU}{d\lambda} &= b(X(\lambda), U(\lambda)). \end{aligned}$$

Escolhemos condições iniciais correspondentes a fixar o valor de u sobre a hipersuperfície S. Supomos, se necessário usando cartas locais, que S é descrita por $x = \varphi(s)$, $s \in \omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$, ω aberto e que o valor de u em S é descrito por $u = \psi(s)$. Consequentemente passamos a considerar o problema de Cauchy para um sistema de equações diferenciais ordinárias, o *sistema característico*

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \lambda} &= a(X(\lambda, s), U(\lambda, s)), \qquad X(0, s) = \varphi(s) \\ \frac{\partial U}{\partial \lambda} &= b(X(\lambda, s), U(\lambda, s)), \qquad U(0, s) = \psi(s) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Este sistema, se a e b forem suficientemente regulares, digamos C^1, terá, de acordo com o teorema fundamental de existência, unicidade e dependência contínua em relação a um parâmetro para equações diferenciais ordinárias, uma solução única numa vizinhança de $\{0\} \times \omega$. Essa solução será uma função de classe C^1 em (λ, s). As respectivas linhas integrais, i.e., as linhas descritas em $\mathbb{R}^{n+1}$ por $\lambda \mapsto (X(\lambda, s), U(\lambda, s))$ para cada s são designadas por *características*. As linhas descritas em $\mathbb{R}^n$ por $\lambda \mapsto X(\lambda, s)$ para cada s são por vezes também designadas nalguma literatura por características mas nós optamos por utilizar para estas a designação de *traços característicos* ou *projecções característicos*.

Para obtermos u em termos de x será natural tentar decidir se a aplicação

$$(\lambda, s) \mapsto X(\lambda, s)$$

é um difeomorfismo. Para isso a ferramenta natural é o teorema da função inversa para garantir esse facto numa vizinhança de um ponto $\varphi(s) \in S$. Tal estará garantido se

$$\begin{aligned} &\det \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial X}{\partial \lambda} & \frac{\partial X}{\partial s} \end{array} \right] (0, s) = \\ &= \det \left[\begin{array}{cc} a(X(0, s), U(0, s)) & \frac{\partial X}{\partial s}(0, s) \end{array} \right] \\ &= \det \left[\begin{array}{cc} a(\varphi(s), \psi(s)) & \frac{\partial \varphi}{\partial s} \end{array} \right] \neq 0. \end{aligned}$$

Esta condição é exactamente a não tangência de S ao campo $a(\cdot, u(\cdot))$ no ponto $\varphi(s)$. Diz-se que uma hipersuperfície verificando esta condição em todos os seus pontos é *não-característica*.

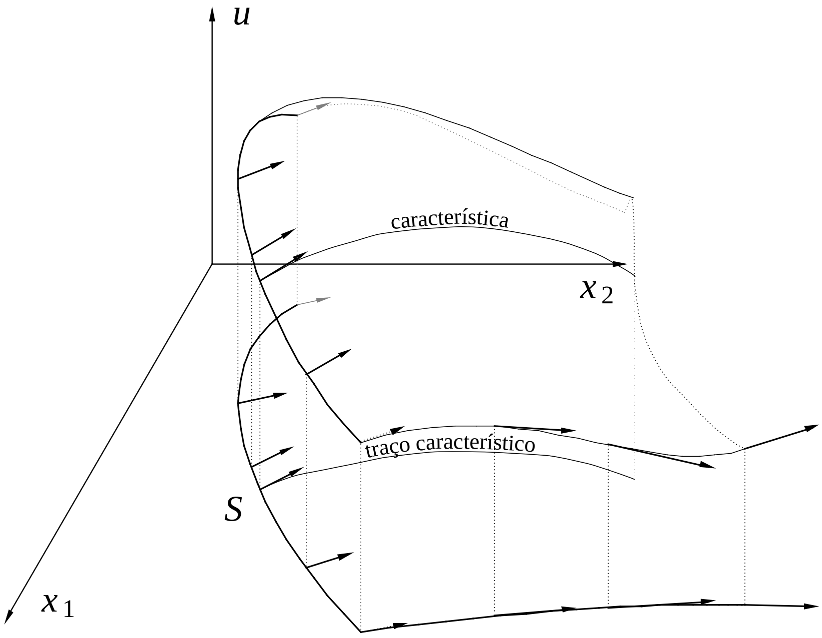

Figura 2.1: O problema de Cauchy para equações diferenciais parciais quase-lineares reais de 1ª ordem.

Podemos então estabelecer um teorema de existência e unicidade de solução para a equação diferencial parcial quase-linear real de primeira ordem.

Teorema 2.2.1. *O problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i(x,u(x))D_i u = b(x,u(x)) & \text{numa vizinhança de } S \\ u = u_0, & \text{em } S \end{cases} \tag{2.5}$$

em que S é uma hipersuperfície C^1 não característica *e a, b, u_0 são C^1 tem uma solução C^1 única numa vizinhança de S.*

Demonstração. Sejam u_1 e u_2 duas soluções de (2.5) numa vizinhança dum ponto de S. Fixe-se $k = 1$ ou 2 e seja X uma solução de

$$\frac{\partial X}{\partial \lambda} = a(X(\lambda,s), u_k(X(\lambda,s))).$$

Seja V definida por

$$V(\lambda,s) = u_k(X(\lambda,s)).$$

Temos então

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \lambda} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial X_i}{\partial \lambda} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} a_i(X(\lambda,s), u_k(X(\lambda,s))) \\ &= b(X(\lambda,s), u_k(X(\lambda,s))) \\ &= b(X(\lambda,s), V(\lambda,s)) \end{aligned}$$

Assim tanto (X,U) como (X,V) são soluções do sistema (2.4) verificando as mesmas condições iniciais. Daí que $U = V$. Note-se que esta conclusão é independente de k. Como X é um difeomorfismo pode-se concluir que $u_1 = u_2$. Estabelecemos assim unicidade da solução.

Para demonstrar a existência de solução de (2.5) usamos o método sugerido antes do enunciado do teorema. Consideramos uma solução (X, U) do sistema característico (2.4) e define-se $u(x) = U(\theta(x))$ em que θ é a aplicação inversa do difeomorfismo $(\lambda, s) \mapsto X(\lambda, s)$ numa vizinhança conveniente dum ponto de S. As propriedades de regularidade de u seguem do que já foi exposto tal como a satisfação das condições de Cauchy. Resta verificar que u é uma solução. Calculamos então

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial U}{\partial s_j}\frac{\partial s_j}{\partial x_i}$$

pelo que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i(x, u(x))\frac{\partial u}{\partial x_i} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial X_i}{\partial \lambda} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial U}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}\frac{\partial X_i}{\partial \lambda} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial U}{\partial s_j}\frac{\partial s_j}{\partial x_i}\frac{\partial X_i}{\partial \lambda} \right) \\
&= \frac{\partial U}{\partial \lambda} \\
&= b(x, u(x))
\end{aligned}$$

verificando que u é efectivamente uma solução de (2.5). ∎

Exercício 2.1. *Resolva os seguintes problemas de Cauchy:*

a) $u_y = xuu_x$, $u(x, 0) = x$;

b) $xu_y - yu_x = u$, $u(x, 0) = h(x)$.

Exercício 2.2. *Suponha que a solução do problema 2.5 está definida numa vizinhança U da hipersuperfície não-característica S. Considere topologias para as funções C^1 em U e em S definidas por seminormas correspondentes ao supremo do módulo da função e das suas derivadas parciais (tangenciais para funções definidas em S) em subconjuntos compactos (para a topologia induzida em S). Enuncie e demonstre um resultado sobre dependência contínua da solução em relação aos valores iniciais.*

Acabámos de estabelecer um resultado de existência local para as equações diferenciais parciais reais de primeira ordem. Convirá agora verificar, através de um exemplo simples, que a existência global de solução só será de esperar em situações muito particulares.

Exemplo. *Comecemos por algumas considererações básicas sobre Mecânica dos Meios Contínuos*[1] *destinadas a permitir uma interpretação física do modelo a considerar.*

Pretendemos descrever a evolução no tempo dum corpo Ω, um aberto de $\mathbb{R}^n$, através duma aplicação $\boldsymbol{x} : \mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{R}^n$ em que supomos $\boldsymbol{x}(0, p) = p$, ou seja a configuração de referência supõe-se idêntica à do corpo no instante $t = 0$. O desenvolvimento da teoria obrigará a fazer suposições do tipo $\boldsymbol{x} \in C^k(\mathbb{R} \times \Omega)$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e que as aplicações $\boldsymbol{x}(t, \cdot)$ são difeomorfismos C^k, i.e., exclui-se a interpenetração da matéria. No entanto existirão situações em que tais hipóteses técnicas não serão adequadas. Por exemplo se se pretende estudar cavitação (formação de buracos no material).

As coordenadas p dizem-se coordenadas materiais *ou* lagrangianas *e as coordenadas $x = \boldsymbol{x}(t, p)$ dizem-se* coordenadas espaciais *ou* eulerianas. *Em particular cada ponto $p \in \Omega$ diz-se uma* partícula *e $\boldsymbol{x}(\cdot, p)$ dir-se-á a sua* trajectória. *Dada uma grandeza $\boldsymbol{g}$ descrita em coordenadas materiais a sua descrição em coordenadas espaciais*[2] *far-se-á através de*

$$g(t, \boldsymbol{x}(t, p)) = \boldsymbol{g}(t, p)$$

[1] Considerações mais extensas sobre Mecânica dos Meios Contínuos são objecto do Apêndice A.

[2] Usar-se-á $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}, \ldots$ para representações de grandezas em coordenadas materiais e $a, b, c, \ldots, \alpha, \ldots$ para as respectivas representações em coordenadas espaciais.

o que é possível graças a supormos que as aplicações $\boldsymbol{x}(t,\cdot)$ são difeomorfismos.

Definem-se os campos de velocidade e aceleração em coordenadas materiais através de

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}(t,p) &= \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}(t,p) \\ \boldsymbol{a}(t,p) &= \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}(t,p). \end{aligned}$$

Claro que

$$\begin{aligned} v(t,\boldsymbol{x}(t,p)) &= \boldsymbol{v}(t,p) \\ a(t,\boldsymbol{x}(t,p)) &= \boldsymbol{a}(t,p). \end{aligned}$$

Note-se que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}(t,p) &= \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}(t,p) \\ &= \frac{\partial v}{\partial t}(t,\boldsymbol{x}(t,p)) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}(t,\boldsymbol{x}(t,p))\frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial t}(t,p) \\ &= \frac{\partial v}{\partial t}(t,\boldsymbol{x}(t,p)) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}(t,\boldsymbol{x}(t,p))\boldsymbol{v}_i(t,p) \end{aligned}$$

em que $v = (v_i)_{1\le i\le n}$, etc.. Em coordenadas espaciais

$$a(t,x) = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} v_i.$$

Se a aceleração de cada partícula for nula devemos ter

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} v_i = 0.$$

Em particular em dimensão $n = 1$ esta equação reduz-se a

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} v = 0. \tag{2.6}$$

É esta a equação que pretendemos considerar tendo em mente a interpretação física que acabámos de sugerir. Considere-se então (2.6) com condição inicial $v(0,x) = v_0(x)$. Esta função corresponderá a uma distribuição de velocidades no instante $t = 0$. O sistema característico para esta equação será

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \lambda} &= 1, \qquad T(0,s) = 0 \\ \frac{\partial X}{\partial \lambda} &= V, \qquad X(0,s) = s \\ \frac{\partial V}{\partial \lambda} &= 0, \qquad V(0,s) = v_0(s) \end{aligned}$$

que tem por solução

$$\begin{aligned} T(\lambda,s) &= \lambda \\ X(\lambda,s) &= \lambda v_0(s) + s \\ V(\lambda,s) &= v_0(s) \end{aligned}$$

pelo que v estará definida implicitamente por $v = v_0(x - tv)$. Note-se que:

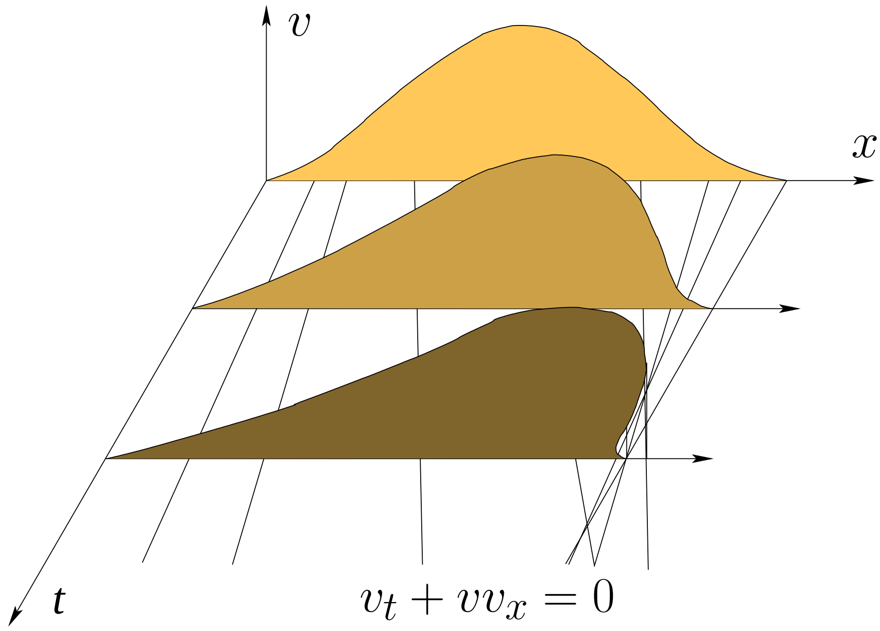

Figura 2.2: A formação de um choque e *blow-up* em tempo finito para a equação de Burger $v_t + v_x v = 0$.

- *ao longo duma característica a velocidade v é constante o que era de esperar do modelo físico (segue-se uma partícula ao longo duma característica);*
- *se v_0 não for crescente existirão $s_1 < s_2$ tais que $v_0(s_1) > v_0(s_2)$ e consequentemente $t > 0$ tal que*
$$tv_0(s_1) + s_1 = tv_0(s_2) + s_2$$
i.e., para $t = (s_2 - s_1)/(v_0(s_1) - v_0(s_2))$ as características intersectar-se-ão, ou seja, uma partícula ultrapassará outra; diz-se que ocorre um choque.

Conjuntamente estas duas observações estabelecem a não existência de solução para $t \geq 0$ se v_0 não for crescente e não existência de solução global se v_0 não for constante.

É sugerido pela Figura 2.2 e fácil de verificar analiticamente que para v_0 de suporte compacto e diferente de 0, v_x tenderá para ∞ em tempo finito. Tal acontecerá para $t = -1/\min v_0'$. ▲

Acabámos de verificar que será em geral impossível definir soluções globais de uma equação diferencial parcial real de primeira ordem. Por outro lado também ficou claro da interpretação física da equação que nas aplicações será de grande interesse estender o conceito de solução para além do que é feito classicamente. Para tal poderemos definir *soluções fracas* de uma equação diferencial parcial. Vamos exemplificar uma via possível ressalvando desde já que voltaremos a este assunto.

Considere-se uma equação diferencial parcial da forma

$$\operatorname{div} F(u) = g \tag{2.7}$$

em que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é uma função C^1, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e div designa o operador divergência. Se u for uma solução clássica num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de (2.7) então, para toda a função $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos que

$$\int_\Omega \varphi(x) \operatorname{div}(F(u))(x)\, dx = \int_\Omega \varphi(x) g(x)\, dx.$$

Mas então integrando por partes, ou usando uma das fórmulas de Green, obtemos

$$\int_\Omega \nabla\varphi(x)\cdot F(u(x)) + \varphi(x)g(x)\,dx = 0. \tag{2.8}$$

Note-se que (2.8) não envolve o cálculo de derivadas parciais de u ou F o que permite

Definição 2.2.2. *Para $F \in C^0(\mathbb{R})$ diz-se que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ é uma solução fraca de (2.7) se para toda a função $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ se verificar (2.8).*

Mais geralmente o leitor familiar com a teoria das distribuições certamente recordará que a definição anterior pode ser interpretada como definindo $u \in L^1_{loc}$ como uma solução fraca de (2.7) se a divergência no sentido das distribuições de $F \circ u$ for nula.

Exercício 2.3. *Considere uma solução fraca de uma equação diferencial parcial da forma*

$$\frac{\partial}{\partial x} f(u) + \frac{\partial}{\partial y} g(u) = 0.$$

em que f, g são continuamente diferenciáveis e $f'(p) = pg'(p)$. Suponha que $u \in C^1(\Omega \setminus S)$ em que $\Omega = [0,1]\times[0,1]$ e S é uma linha C^1 de equação $y = \zeta(x)$, $x \in [0,1]$, e que se $P \in S$ então existem os limites para P de u quando restrito a $y > \zeta(x)$ ou a $y < \zeta(x)$. Estabeleça uma equação diferencial ordinária satisfeita por ζ.

2.3 Caso geral

Considere-se agora o caso geral (2.1). Mais uma vezes vamos recorrer ao estabelecimento dum sistema de equações diferenciais ordinárias. No entanto necessitaremos dum maior número de equações: $2n+1$. A razão para tal deve-se a que no caso da equação quase-linear podemos obter, lendo a equação, uma direcção segundo a qual a derivada dirigida de u é conhecida desde que se conheça o valor de u no ponto x e *independentemente do plano tangente ao gráfico de u, i.e. independemente de Du*. Em geral a equação continuará a dar-nos informação sobre o crescimento de u numa direcção "privilegiada" mas tal direcção dependerá em geral não só de x e $u(x)$ como também de $Du(x)$. Daí que seja necessário juntar mais n equações ao sistema característico, uma para cada uma das componentes de Du.

Vamos tentar então dar um sentido mais preciso às observações anteriores. Comecemos por substituir $Du(x)$ por $p(x)$ em (2.1) com $p = (p_i)_{1\le i\le n}$ e escrevemos

$$F(x, u, p) = 0. \tag{2.9}$$

Interpretamos esta equação como significando que, dados x e u temos uma restrição aos valores de p. Por exemplo, sejam dados adicionalmente $p_1, \dots, p_{n-1}$. Poderemos tentar então resolver (2.9) em ordem a p_n. No caso quase-linear, desde que $a_n(x,u) \neq 0$, tal poderia ser feito[3]. Dada a não-linearidade da equação teremos em geral uma situação mais complicada. Poderá não-existir solução, ou existir uma ou mais soluções. No entanto se supusermos que $F \in C^1$

$$F(x_0, u_0, p_0) = 0 \tag{2.10}$$

e que

$$\frac{\partial F}{\partial p_n}(x_0, u_0, p_0) \neq 0$$

então podemos obter usando o teorema da função implícita que para uma certa função $g \in C^1$

$$p_n = g(x_0, u_0, (p_i)_{1\le i\le n-1})$$

[3] Dir-se-á, ver §5.1, que e_n é uma direcção *não-característica*.

para $(p_i)_{1\leq i\leq n-1}$ numa vizinhança de $((p_0)_i)_{1\leq i\leq n-1}$. Mais geralmente, não dando um papel privilegiado a nenhuma coordenada podemos supôr que "genericamente" se (2.10) for satisfeita então devemos ter $p = p(\xi)$ com $\xi \in \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $\mathcal{V}$ uma vizinhança de 0 e $p(0) = p_0$, i.e. temos razão para supor que "genérica" e localmente os possíveis valores de p definem uma variedade C^1 $n-1$ dimensional.

Tentaremos agora determinar, à semelhança do que foi feito para a equação quase-linear, uma direcção priveligiada segundo a qual a equação nos dê informação sobre a derivada dirigida de u tanto quanto possível "independentemente"[4] de $\xi \in \mathcal{V}$. Isto corresponde a procurar h tal que para todo o j

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j}(h \cdot p) \equiv h \cdot \frac{\partial p}{\partial \xi_j} = 0.$$

Por outro lado devemos ter

$$F(x_0, u_0, p(\xi)) = 0$$

pelo que para cada j

$$\frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial \xi_j} = 0,$$

o que sugere utilizar $h = \frac{\partial F}{\partial p}$. Consequentemente haverá alguma esperança de atingir os nossos objectivos através do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dX}{d\lambda} = \frac{\partial F}{\partial p} \tag{2.11}$$

$$\frac{dU}{d\lambda} = p \cdot \frac{\partial F}{\partial p}. \tag{2.12}$$

No caso quase-linear pode-se eliminar p dos segundos membros mas em geral precisamos de equações suplementares que sejam satisfeitas por p. Suponha-se então que u é uma solução C^2 de (2.1). Derivando ambos os membros de (2.1) em ordem a x_i obtém-se

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial x_i} = 0.$$

Note-se que devido a u ser suposto C^2 deveremos ter necessariamente $\frac{\partial p_j}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial x_j}$. Como também queremos satisfazer (2.11) obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial \lambda}\frac{\partial p_i}{\partial x_j} = 0$$

pelo que o sistema de equações diferenciais ordinárias passa a ser determinado quando completado pelas n equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dP}{d\lambda} = -\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial u}p.$$

Iremos provar mais à frente que sob condições adequadas este sistema permite resolver o problema. Uma dessas condições será com certeza $F \in C^2$ para podermos usar o mesmo teorema sobre sistemas de equações diferenciais ordinárias que usámos no caso quase-linear. Outra condição será possivelmente supormos os dados C^2 pois ao estabelecermos o sistema supusemos $u \in C^2$.

Também neste caso vamos estar interessados em isolar uma solução considerando o problema de Cauchy e proceder como no caso quase-linear. No entanto teremos dificuldades adicionais

[4] O leitor é referido a [15, 8, 3] para uma interpretação geométrica, aqui omitida, deste argumento heurístico baseado em considerações analíticas.

devido ao carácter não linear do problema e devido a termos que fornecer condições iniciais para P no sistema característico. Com efeito se supusermos dada uma hipersuperfície $S \in C^2$ e uma função u_0 suficientemente regular definida em S automaticamente as derivadas parciais de u_0 estão definidas nas direcções tangenciais a S. Isto não determina imediatamente os valores de todas as derivadas parciais de u sobre S de modo a poder ter as condições iniciais para P no sistema característico. Portanto precisa-se de conhecer a derivada normal de u sobre S o que terá que ser feito à custa da equação. Mais precisamente se $x = \varphi(s)$ com $s \in \omega$ for uma parametrização de S devemos ter

$$u(\varphi(s)) = u_0(\varphi(s))$$

para todo o $s \in \omega$ pelo que queremos determinar as condições iniciais do sistema característico a partir de

$$\begin{aligned} X(0,s) &= \varphi(s) && (2.13)\\ U(0,s) &= u_0(\varphi(s)) && (2.14) \end{aligned}$$

e da resolução do sistema

$$\begin{aligned} P(0,s)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial s_j} &= \frac{\partial}{\partial s_j}(u_0(\varphi(s))) && (2.15)\\ F(X(0,s),U(0,s),P(0,s)) &= 0. && (2.16) \end{aligned}$$

Como já afirmámos o carácter não-linear poderá causar que este sistema não tenha soluções, tenha mais que uma solução ou que não tenha soluções sob pequenas perturbações. Para evitarmos tais questões *supomos*[5] que existe uma função $u_0 \in C^2$ definida numa vizinhança de S tal que

$$F(\varphi(s), u_0(\varphi(s)), Du_0(\varphi(s))) = 0 \qquad \text{para } s \in \omega \tag{2.17}$$

e tal que possamos garantir que a aplicação $(\lambda, s) \mapsto X(\lambda, s)$ é um difeomorfismo. Para tal, mais uma vez aplicando o teorema da função inversa, exigimos que

$$\begin{aligned} &\det\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial X}{\partial\lambda} & \frac{\partial X}{\partial s}\end{array}\right](0,s) = \\ &\qquad \det\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial F}{\partial p}(\varphi(s), u_0(\varphi(s)), Du_0(\varphi(s))) & \frac{\partial\varphi}{\partial s}(s)\end{array}\right] \neq 0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Diremos se (2.17) e (2.18) forem satisfeitas que S é não característica (relativamente a F e a u_0).

Podemos então proceder de maneira análoga ao caso quase-linear para obter

Teorema 2.3.1. *Considere-se o problema de Cauchy*

$$\begin{aligned} F(x,u(x),Du(x)) &= 0\\ u &= u_0, \qquad \text{em } S \end{aligned}$$

em que $u_0 \in C^2$ está definida numa vizinhança de S, S é uma hipersuperfície C^2 em $\mathbb{R}^n$, $F \in C^2(U)$ em que U é uma vizinhança de $\{(x,u_0(x),Du_0(x)) : x \in S\}$ e S é não característica relativamente a F e a u_0. Então o problema tem uma solução C^2 única numa vizinhança de S.

2.4 Comentários

Estudámos o problema de Cauchy para equações diferenciais parciais reais de primeira ordem e pudémos concluir que localmente este é um problema bem posto sob condições de regularidade

[5] Claro que há a questão de como justificar esta suposição. A ideia que ocorre imediatamente é através de uma mudança de variáveis reduzir o problema ao caso em que S é um subconjunto dum hiperplano com um dos eixos coordenados normal a S. Será este o ponto de vista a adoptar no Capítulo 5.1.

adequadas da equação e das condições iniciais e desde que uma condição de não-caracteristicidade da hipersuperfície onde estão definidos os valores iniciais seja satisfeita[6].

Convém reparar desde já que outro grande tipo de problemas que nos aparecerá no estudo das equações diferenciais parciais, os problemas de valores na fronteira, são "mal postos" para as equações diferenciais parciais reais de primeira ordem. Esta observação é facilmente estabelecida no caso do exemplo elementar no princípio deste capítulo ou no exercício seguinte.

Exercício 2.4. *Seja u uma solução de*

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = -u$$

de classe C^1 em $\overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^2$. Supondo que $a(x,y)x + b(x,y)y > 0$ na fronteira de $\overline{B_1(0)}$ prove que u é identicamente 0.

A referência mais completa sobre o tema deste capítulo continua a ser [3]. Um ponto de vista geométrico mais moderno é fornecido por [1]. Para uma segunda leitura sobre equações de primeira ordem o leitor é aconselhado a consultar [15].

[6]Em geral não se verifica unicidade de solução do problema de Cauchy no caso não linear e portanto a unicidade de solução deverá ser interpretada dum modo adequado. Por outro lado os resultados enunciados não incluem explicitamente a dependência contínua em relação às condições iniciais embora tal seja fácil de estabelecer.

2.5 Exercícios suplementares

Estes exercícios, tal como alguns dos inseridos ao longo do texto deste capítulo, podem encontrar-se em forma mais ou menos modificada em [15].

Exercício 2.5. *Decida se u definida em $\{(x, y) : y \geq 0\}$ por*

$$u(x, y) = \begin{cases} -\frac{2}{3}(y + \sqrt{3x + y^2}), & \text{para } 3x + y^2 > 0 \\ 0, & \text{para } 3x + y^2 \leq 0 \end{cases}$$

é uma solução fraca de

$$\frac{\partial}{\partial y}u + \frac{\partial}{\partial x}(u^2/2) = 0.$$

Exercício 2.6. *Para a equação*

$$u_y = u_x^3$$

a) determine a solução com $u(x, 0) = 2x^{3/2}$;

b) mostre que toda a solução regular para todo o x, y é linear.

[Sugestão: *Considere u_x, u_y ao longo duma característica.*]

Exercício 2.7. *Para a equação*

$$u = xu_x + yu_y + \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2)$$

determine uma solução com $u(x, 0) = \frac{1}{2}(1 - x^2)$.

Exercício 2.8. *Considere uma função dada $H(x, t, p)$ com $x = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ e $p = (p_i)_{1\leq i\leq n}$ e a equação diferencial parcial em u (equação de Hamilton-Jacobi)*

$$F \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + H(x, t, Du) = 0.$$

Obtenha o sistema característico na forma

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \frac{dH}{dp} \\ \frac{dU}{dt} &= p \cdot \frac{dH}{dp} - H \\ \frac{dP}{dt} &= -\frac{dH}{dx}. \end{aligned}$$

Definindo $\frac{dX}{dt} = v$, $\frac{dU}{dt} = L$, use as primeiras $n + 1$ equações para exprimir L como uma função de x, t, v. Mostre então que

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial v} &= p \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= -\frac{dH}{dx} \end{aligned}$$

o que implica

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

Exercício 2.9. Considere os operadores diferenciais lineares de primeira ordem $L_1 \equiv \frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial x}$, $L_2 \equiv x\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}$ que actuam sobre funções em $C^1(\Omega)$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto.

a) Estabeleça existência e unicidade de solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} L_1 L_2 u & = 1 \\ u(x,-x) & = \varphi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,-x) + \frac{\partial u}{\partial x}(x,-x) & = \psi(x) \end{cases}$$

em $C^2(U)$ com U uma vizinhança suficientemente pequena de $(0,0)$ com φ, ψ funções C^2 numa vizinhança de 0.

b) Explicite tanto quanto possível a solução tomando $\varphi(x) = 1$, $\psi(x) = 0$.

Capítulo 3

O Laplaciano

3.1 Introdução

Este capítulo pretende oferecer desde já um contraste com o tipo de problemas estudados no Capítulo 2 de modo a convencer o leitor que o estudo das equações diferenciais tem uma necessidade intrínseca de utilizar métodos variados que dependem do "tipo" da equação em estudo e que posteriormente, no Capítulo 4, levará a um necessário esforço de classificação. Com efeito, as equações diferenciais parciais reais de primeira ordem caem, como vimos, na classe dos problemas de valores iniciais, isto é, "genericamente" o problema

$$\begin{cases} F(x,u,Du) = 0 & \text{numa vizinhança duma hipersuperfície } S, \\ u = \varphi & \text{sobre } S, \end{cases}$$

está bem posto[1]. Vamos agora estudar um operador de segunda ordem cujas propriedades serão em larga medida exemplificativas do que se passa com os operadores de segunda ordem que no Capítulo 4 classificaremos como elípticos. Esse operador é o laplaciano $\Delta \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ e teremos como objectivo essencial mostrar que *problemas de valores na fronteira* tais como o *problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{num aberto } \Omega, \\ u = \varphi & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

ou o *problema de Neumann*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{num aberto } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

em que $\frac{\partial}{\partial \nu}$ designa derivação normal exterior e f, g, φ são funções dadas, estão essencialmente bem postos[2], contrastando com o que aconteceria com o *problema de valores iniciais* relativo ao mesmo operador

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{numa vizinhança duma hipersuperfície } S \\ u = \varphi & \text{sobre } S \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{sobre } S. \end{cases} \tag{3.3}$$

Exemplo. (Hadamard) *Considere* (3.3) *em dimensão* $n = 2$ *com* $f = 0$, $S = \{(x_1, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\}$, $\varphi = 0$, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = ke^{-k^{1/2}} \operatorname{sen} kx_1$. *Usando separação de variáveis é possível determinar uma solução (única) para este problema. Tal solução é*

$$u(x_1, x_2) = e^{-k^{1/2}} \operatorname{sen}(kx_1) \operatorname{sh}(kx_2)$$

[1] Ver condições suficientes para existência de solução local no Teorema 2.3.1 e comentários no final do Capítulo 2.
[2] Esta afirmação é verdadeira se f e g forem compatíveis num sentido a precisar no Exercício 3.1.

Quando $k \to \infty$, os dados e todas as suas derivadas de todas as ordens convergem uniformemente para 0. Mas se $x_2 \neq 0$ temos $\lim_{k\to\infty} u(x_1, x_2) = \infty$. É assim impossível, pelo menos no quadro de topologias definidas por seminormas de supremos de módulos de funções e das suas derivadas, dizer que existe dependência contínua dos dados. ▲

Exercício 3.1. *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto com fronteira regular e que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ satisfaz (3.2). Mostre que*

$$\int_\Omega f\, dx = \int_{\partial\Omega} g\, dS$$

As soluções de $\Delta u = 0$ num aberto Ω dir-se-ão *funções harmónicas* em Ω.

3.2 Soluções radiais

Comecemos por observar a seguinte propriedade notável do laplaciano

Exercício 3.2. *Seja $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma matriz $n \times n$ verificando $QQ^T = Q^TQ = \mathrm{Id}$ em que* Id *designa a matriz identidade e ^{T} designa transposição*[3]*. Mostre que se u é uma solução de*

$$\Delta u(x) = f(x)$$

e $v(x) = u(Qx)$ então

$$\Delta v(x) = f(Qx).$$

Considere-se em $SO(n)$ a topologia induzida pela topologia usual em $\mathbb{M}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$, o espaço vectorial das matrizes reais $n \times n$. Suponha-se agora que é possível definir uma medida regular positiva μ sobre $SO(n)$ com $\mu(SO(n)) = 1$ e que se $R \in SO(n)$ e $\mathcal{A} \subset SO(n)$ é mensurável então $R\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}R$ são mensuráveis e $\mu(R\mathcal{A}) = \mu(\mathcal{A}R) = \mu(\mathcal{A})$. Por outras palavras supomos que se pode definir uma probabilidade, σ, regular e invariante à esquerda e à direita em $SO(n)$[4]. Uma construção elementar desta medida na situação particular aqui considerada é efectuada no Exercício 3.4. Considere-se, dada uma função harmónica $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, uma outra função $u^\sharp$ definida por

$$u^\sharp(x) = \int_{SO(n)} u(Qx)\, d\sigma(Q).$$

É possível provar que a construção anterior define efectivamente $u^\sharp$ como uma função que só depende de $|x|$. Note-se que se $u(x) = x$ teremos $u^\sharp = 0$ pelo que os resultados desta construção podem ser triviais. Não é nosso objectivo aprofundar[5] esta ideia mas tão somente fazer notar que a invariância de Δ relativamente a $SO(n)$ pode sugerir uma investigação da existência de funções harmónicas com simetria radial. Com efeito verifica-se que

Exercício 3.3. *Seja $w(x) = \psi(|x|)$ uma função harmónica em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Então teremos para certas constantes C, K*

$$\psi(r) = \begin{cases} \frac{C}{(2-n)} r^{2-n} + K, & \text{se } n > 2, \\ C \log r + K, & \text{se } n = 2. \end{cases} \tag{3.4}$$

Estas funções vão desempenhar um papel fundamental em tudo o que faremos neste capítulo. Note-se que a passagem a coordenadas esféricas e o teorema da convergência dominada de Lebesgue permitem estabelecer facilmente que $w \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

[3] *Diz-se que uma matriz que verifica esta propriedadade é ortogonal ou que pertence ao grupo ortogonal, $O(n)$. Se adicionalmente* $\det Q = 1$ *diz-se que Q pertence ao grupo especial ortonormal, $SO(n)$, ou mais prosaicamente que é uma rotação.*

[4] Pode provar-se que num grupo localmente compacto separável e metrizável pode definir-se uma única medida positiva com estas caracterísiticas que é designada como *medida de Haar.* O estudo desta questão está para além dos objectivos deste curso.

[5] Para um tratamento rigoroso e não elementar desta ideia consultar [30].

Exercício 3.4. *Este exercício esboça como construir a medida de Haar em $SO(n)$ (ou em $O(n)$ com pequenas modificações).*

Considere-se $SO(n) \subset \mathbb{M}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$. Seja U uma vizinhança limitada de $SO(n)$ tal que $\overline{U} \subset \{A \in \mathbb{M} : \det A > 0\}$.

a) Prove que aplicação $P : U \to \mathbb{M}$ definida por

$$P(A) = A\left(\sqrt{A^T A}\right)^{-1},$$

em que $\sqrt{\ }$ designa a raiz definida positiva duma matriz simétrica definida positiva, tem por contradomínio $SO(n)$.

b) Verifique que se μ é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^{n^2}$ e $E \subset SO(n)$ é tal que $P^{-1}(E) \cap U$ é Lebesgue mensurável em $\mathbb{R}^{n^2}$ então

$$\Sigma(E) = \mu(P^{-1}(E) \cap U)$$

define uma medida positiva regular sobre $SO(n)$.

c) Para cada E Σ-mensurável em $SO(n)$ defina

$$\sigma(E) = \frac{1}{\Sigma(SO(n))^2} \int_{SO(n)} \int_{SO(n)} \Sigma(QER)\, d\Sigma(Q)\, d\Sigma(R).$$

Prove que σ é uma probabilidade regular positiva e invariante à esquerda e à direita em $SO(n)$.

3.3 Fórmula de Green e Solução Fundamental

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado cuja fronteira $\partial\Omega$ é suficientemente regular (por exemplo, mas não necessariamente, C^2 de maneira a permitir a aplicação do teorema de Gauss). Sejam $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ duas funções em $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Então, se ν designar a normal exterior a $\partial\Omega$, temos

$$\int_\Omega \operatorname{div}(u\nabla v)\, dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu}\, dS(x). \tag{3.5}$$

Daí que, trocando u com v e subtraindo a nova igualdade da anterior, se obtenha a *fórmula de Green*

$$\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u\, dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS(x). \tag{3.6}$$

Esta igualdade vai ter consequências importantes em tudo o que se segue neste capítulo. Em particular considerando $v = \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e Ω um aberto contendo $\operatorname{supp}\varphi \cup B_\epsilon(0)$ ou $\Omega = B_\epsilon(0)$ obtém-se

$$\int_{\Omega\setminus B_\epsilon(0)} u\Delta\varphi - \varphi\Delta u\, dx = -\int_{\partial B_\epsilon(0)} u\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varphi\frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS(x)$$

em que ν é a normal exterior a $B_\epsilon(0)$. Considerando $u = w$ definido por (3.4) obtém-se

$$\int_{\Omega\setminus B_\epsilon(0)} w\Delta\varphi\, dx = -\int_{\partial B_\epsilon(0)} w\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varphi\frac{\partial w}{\partial \nu}\, dS(x). \tag{3.7}$$

Faça-se agora $\epsilon \downarrow 0$. Obtém-se que o lado esquerdo da igualdade anterior converge para o integral da mesma função em Ω. Quanto ao lado direito nota-se que para todo o n

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = Cx_i|x|^{-n}$$

pelo que

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}\bigg|_{|x|=\epsilon} = C\epsilon^{1-n}.$$

Por outro lado

$$w\Big|_{|x|=\epsilon} = \begin{cases} \frac{C}{2-n}\epsilon^{2-n} + K & \text{se } n > 2, \\ C\log\epsilon + K & \text{se } n = 2. \end{cases}$$

Defina-se $\omega_n = \int_{\partial B_1^n(0)} 1\, dS$, obtendo-se, para a área da superfície da esfera $n-1$ dimensional de raio ϵ, $\int_{\partial B_\epsilon^n(0)} 1\, dS = \omega_n \epsilon^{n-1}$. Tomando os limites quando $\epsilon \downarrow 0$ dos integrais do segundo membro de (3.7), obtém-se

$$\int_\Omega w\Delta\varphi\, dx = C\omega_n\varphi(0). \tag{3.8}$$

Definimos

Definição 3.3.1. *As funções* $\Gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *definidas por*

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_n(2-n)}|x|^{2-n} & \textit{se } n > 2, \\ \frac{1}{2\pi}\log|x| & \textit{se } n = 2. \end{cases}$$

designam-se por soluções fundamentais radiais n-dimensionais da equação de Laplace.

Note que temos[6]

$$\int_\Omega \Gamma\Delta\varphi\, dx = \varphi(0).$$

Convir-nos-á utilizar as translacções das soluções fundamentais. Para tal introduz-se a notação $\Gamma_y(x) = \Gamma(y-x)$.

3.4 Função de Green — casos elementares

Estamos ainda longe de ter esgotado as potencialidades da fórmula de Green (3.6). Suponha-se que $y \in \Omega$ e $\epsilon > 0$ tal que $\overline{B_\epsilon(y)} \subset \Omega$. Substitua-se em (3.6) Ω por $\Omega\backslash\overline{B_\epsilon(y)}$ e v por Γ_y. Obtém-se, de forma análoga ao que se fez para obter (3.8), para cada $y \in \Omega$, a *fórmula de representação integral*

$$u(y) = \int_\Omega \Gamma_y \Delta u\, dx + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial \Gamma_y}{\partial\nu} - \Gamma_y\frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS(x). \tag{3.9}$$

Em particular note-se que, se u fôr uma função harmónica, fica perfeitamente determinada pelos valores de u e de $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ sobre $\partial\Omega$. Se por outro lado tomarmos tanto u como v em (3.6) harmónicas obtemos

$$0 = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial\nu} - v\frac{\partial u}{\partial\nu}\, dS(x).$$

Se adicionarmos membro a membro esta igualdade à fórmula de representação integral (3.9), supondo que $v = -\Gamma_y$ sobre $\partial\Omega$, obtém-se

Teorema 3.4.1. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é um aberto com fronteira regular tal que a família de problemas*

$$\begin{cases} \Delta v_y = 0 & \textit{em } \Omega, \\ v_y = -\Gamma_y & \textit{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.10}$$

tem solução em $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *para todo* $y \in \Omega$*. Então, se a solução do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \textit{em } \Omega, \\ u = \varphi & \textit{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.11}$$

[6] À luz de algumas noções elementares de teoria das distribuições (3.8) pode ser interpretada como mostrando que se $C = \frac{1}{\omega_n}$ então w é uma solução fundamental para o operador Δ.

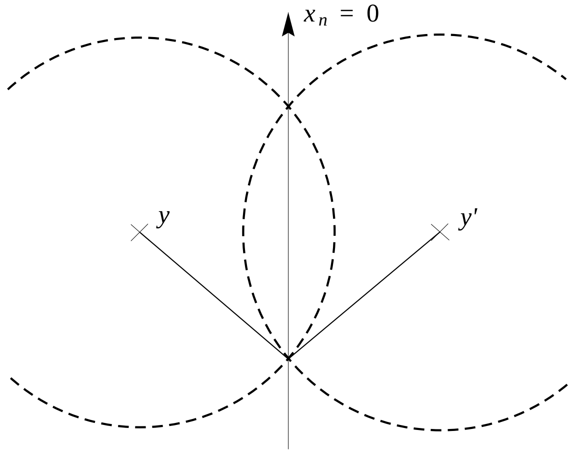

Figura 3.1: O método de simetria para a determinação da função de Green num semi-espaço.

existir em $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, é necessariamente dada por

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial G_y}{\partial \nu}\, dS(x) \tag{3.12}$$

em que G_y é a função de Green de Ω.

No enunciado anterior pressupõe-se

Definição 3.4.2. *Se a família de problemas ((3.10)) tiver soluções, a família de funções definida por $G_y(x) \equiv \Gamma_y(x) + v_y(x)$, $y \in \Omega$, $x \in \Omega \setminus \{y\}$ designa-se por* função de Green *de Ω.*

Garantir a existência duma função de Green para um certo aberto Ω é uma tarefa em geral não trivial e, por enquanto, a análise de tal questão está para além das possibilidades das ferramentas técnicas ao nosso dispôr. O mesmo se poderá dizer, ainda com mais pertinência, quanto à determinação explícita da função de Green para um aberto dado. Vamos limitarmo-nos de momento à construção da função de Green em dois casos particulares em que a geometria simples do aberto em questão permite usar argumentos geométricos elementares.

Considere-se então o caso em que Ω é um semi-espaço. Claro que por translação e rotação podemos supôr que $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x = (x_i)_{i=1,\ldots,n}, x_n > 0\}$. Defina-se então, veja-se a figura 3.1, $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_{n-1}, -y_n)$. É fácil verificar que $\Gamma_y - \Gamma_{\overline{y}}$ é efectivamente uma função de Green no semi-espaço Ω.

Se Ω é a bola unitária centrada em 0 recorremos a uma ideia semelhante em que a simetria $y \mapsto \overline{y}$ é substituída pela inversão $y \mapsto y^* \equiv |y|^{-2} y$, ver Figura 3.2. Com efeito seja $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x| = 1$. Então observamos que

$$|x - y^*|^2 = 1 - 2x \cdot y^* + |y^*|^2 = \frac{1}{|y|^2}\left(|y|^2 - 2x \cdot y + 1\right) = \frac{1}{|y|^2}|x - y|^2 \tag{3.13}$$

o que permite estabelecer para $|x| = 1$ a identidade

$$\Gamma_{y^*}(x) = \begin{cases} |y|^{n-2}\Gamma_y(x), & \text{se } n > 2, \\ \Gamma_y(x) - \log|y|, & \text{se } n = 2. \end{cases} \tag{3.14}$$

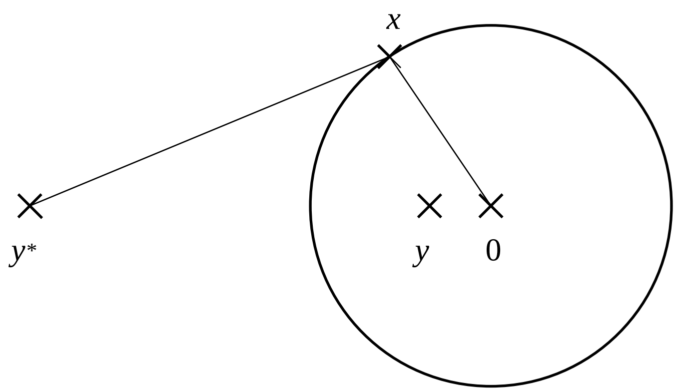

Figura 3.2: O método de simetria para a determinação da função de Green numa bola. A fronteira da bola de raio 1 centrada em 0 é o lugar geométrico dos pontos x tais que o quociente das distâncias a y e a y^* é constante.

Assim concluímos que a função de Green para a bola $B_1(0)$ é dada por

$$G_y(x) = \begin{cases} \Gamma_y(x) - |y|^{2-n}\Gamma_{y^*}(x), & \text{se } n > 2, \\ \Gamma_y(x) - \log|y| - \Gamma_{y^*}(x), & \text{se } n = 2. \end{cases}$$

Como para qualquer $n \geq 2$

$$\nabla_x G_y(x) = \frac{1}{\omega_n}\left\{ \frac{x-y}{|x-y|^n} - |y|^{2-n}\frac{x-y^*}{|x-y^*|^n} \right\}$$

e a normal exterior à fronteira da bola unitária centrada em 0 é dada por $\nu(x) = \frac{x}{|x|}$ obtemos para $\frac{\partial G_y}{\partial \nu_x}$ sobre $\partial B_1(0)$

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial G_y}{\partial \nu_x}(x)\right|_{|x|=1} &= \frac{1}{\omega_n}\left\{ \frac{1-x\cdot y}{|x-y|^n} - |y|^{2-n}\frac{1-x\cdot y^*}{|x-y^*|^n} \right\} \\ &= \frac{1}{\omega_n}\frac{1-|y|^2}{|x-y|^n} \end{aligned}$$

em que se usou (3.13). Obteve-se portanto a *fórmula integral de Poisson*

$$u(y) = \int_{\partial B_1(0)} u(x)K(x,y)\, dS(x) \tag{3.15}$$

válida para funções $u \in C^2(\overline{B_1(0)})$ e em que

$$K(x,y) \equiv K_y(x) \equiv \frac{1}{\omega_n}\frac{1-|y|^2}{|x-y|^n}$$

é designado por *núcleo de Poisson*.

Exercício 3.5. *Obtenha a função de Green e a fórmula de representação de Poisson para uma bola de raio r centrada em x_0.*

A respeito da inversão é interessante reflectir sobre o resultado seguinte:

Exercício 3.6. *Mostre que se u é uma função harmónica então a* inversão, *ou* transformação de Kelvin, *que a u associa*

$$v(x) = |x|^{2-n} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$$

fornece outra função harmónica.

3.5 Núcleo de Poisson — solução do problema de Dirichlet numa bola

Um dos nossos objectivos essenciais é a resolução do problema de Dirichlet (3.1). A fórmula integral de Poisson vai permitir essa resolução para uma bola. Com efeito

Teorema 3.5.1. *Seja $\varphi : \partial B_1(0) \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se definirmos*

$$u(y) = \begin{cases} \int_{\partial B_1(0)} \varphi(x) K(x,y)\, dS(x) & \text{se } |y| < 1, \\ \varphi(y) & \text{se } |y| = 1, \end{cases}$$

então $u \in C^0(\overline{B_1(0)})$ e u é harmónica e analítica em $B_1(0)$.

Demonstração. Que u é harmónica segue facilmente de podermos comutar Δ_y com o integral e com $\frac{\partial}{\partial \nu_x}$ e das soluções fundamentais $\Gamma_y(x)$ e $\Gamma_{y^*}(x)$ serem funções harmónicas de y o que no caso de Γ_y é trivial e no caso de Γ_{y^*} se pode comprovar por cálculo ou usando o Exercício 3.6.

A analiticidade de u segue também facilmente se observarmos que a função integranda é analítica em y e dos resultados sobre integração de séries de potências.

Resta provar a continuidade de u sobre $\partial B_1(0)$. Sejam $x_0 \in \partial B_1(0)$, $y \in B_1(0)$ e $\epsilon > 0$. Começamos por notar que que para as funções constantes vale (3.15) pelo que

$$u(x_0) - u(y) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} (\varphi(x_0) - \varphi(x)) \frac{1 - |y|^2}{|x-y|^n}\, dS(x)$$

Sejam $M > 0$ tal que $|\varphi| \leq M$ sobre $\partial B_1(0)$ e $\delta > 0$ tal que para $|x - x_0| < \delta$ e $x \in \partial B_1(0)$ tenhamos $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \epsilon/2$. Temos então

$$\left| \int_{\partial B_1(0) \cap B_\delta(x_0)} (\varphi(x_0) - \varphi(x)) \frac{1-|y|^2}{|x-y|^n}\, dS(x) \right| < \frac{\epsilon}{2} \int_{\partial B_1(0)} \frac{1-|y|^2}{|x-y|^n}\, dS(x) = \frac{\epsilon}{2}.$$

Por outro lado

$$\left| \int_{\partial B_1(0) \setminus B_\delta(x_0)} (\varphi(x_0) - \varphi(x)) \frac{1-|y|^2}{|x-y|^n}\, dS(x) \right| < 2M \int_{\partial B_1(0) \setminus B_\delta(x_0)} \frac{1-|y|^2}{|x-y|^n}\, dS(x).$$

Escolhamos $\gamma > 0$ tal que $\gamma < \delta/2$ e, se y fôr tal que $|x_0 - y| < \gamma$, temos $1 - |y|^2 = |x_0|^2 - |y|^2 < \epsilon\delta^n/(2^{n+2}M)$. Podemos assim estabelecer que se $|x_0 - y| < \gamma$ então $|u(x_0) - u(y)| < \epsilon$. Provou-se a continuidade de u sobre $\partial\Omega$. ∎

Exercício 3.7. *Estabeleça o resultado análogo para um semi-espaço. Suponha que os valores na fronteira além de contínuos têm um crescimento para ∞ suficientemente lento.*

3.6 Teorema do valor médio para funções harmónicas

Uma consequência imediata da fórmula integral de Poisson é o *teorema do valor médio*:

Teorema 3.6.1. *Seja $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função harmónica no aberto Ω. Então para cada bola $B_r(x_0) \subset \Omega$ vale*

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x)\, dx \tag{3.16}$$

Demonstração. Considere $y = 0$ na fórmula integral de Poisson e use translacções e homotetias para obter o caso geral. ■

Uma forma equivalente do teorema do valor médio envolve médias em bolas e não em esferas. É de notar que para obter a equivalência entre as duas formulações não é necessário a hipótese de harmonicidade.

Exercício 3.8. *Seja $u : B_R(x) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que u verifica para $0 < r < R$*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS(y) \qquad \text{para } 0 < r < R,$$

se e só se

$$u(x) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} u(y)\, dy \qquad \text{para } 0 < r < R.$$

A demonstração do teorema do valor médio não necessita da obtenção prévia da fórmula integral de Poisson bastando utilizar um argumento bastante mais simples descrito no exercício seguinte.

Exercício 3.9. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2(\Omega)$ e $B_r(x)$ uma bola contida em Ω. Se $\Delta = (\geq, \leq)\ 0$ em Ω então*

$$u(x) = (\leq, \geq)\ \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS(y). \tag{3.17}$$

Para tal considere a função

$$]0, \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)[\ \ni r \mapsto \phi(r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y)\, dy$$

e prove que

a) $\lim_{r\downarrow 0} \phi(r) = u(x)$*;*

b) ϕ *é diferenciável e* $\phi'(r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} \nabla u(y) \cdot \frac{y-x}{r}\, dS(y)$.

c) Use o teorema da divergência para exprimir ϕ' em termos dum integral de Δu e obtenha o resultado.

Às funções $u \in C^2(\Omega)$ satisfazendo $\Delta u \geq (\leq)\ 0$ chamaremos *subharmónicas* (*superharmónicas*)[7].

3.7 O princípio de máximo

A consequência mais importante do teorema do valor médio é provavelmente o *princípio de máximo*. A versão do teorema seguinte é conhecida por *princípio de máximo forte* .

Teorema 3.7.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto conexo e $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua tal que para cada $x \in \Omega$ existe $R_x > 0$ satisfazendo*

$$u(x) \leq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y)\, dy \tag{3.18}$$

sempre que $0 < r < R_x$. Então se u tem um máximo absoluto então u é constante em Ω. Em particular se u é uma função harmónica e tem máximo ou mínimo absoluto então u é constante.

[7]As definições de *função subharmónica* e *função superharmónica* serão generalizadas na Secção 3.9.

Demonstração. Seja u uma função contínua em Ω que satisfaz (3.18) e M o valor do máximo de u. Considere-se o conjunto $A = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$. A continuidade de u assegura que A é fechado. Por outro lado se $x \in A$ a desigualdade (3.17) mostra que para y numa bola centrada em x, de raio suficientemente pequeno para que essa bola esteja contida em Ω, devemos ter $u(y) = u(x)$ pelo que A é formado exclusivamente por pontos interiores. Assim A é simultâneamente aberto e fechado em Ω. Como A é não vazio e Ω é conexo temos $A = \Omega$. ■

Usando a analiticidade das funções harmónicas (Teorema 3.5.1) pode remover-se a restrição dos extremos serem absolutos no resultado anterior generalizando-o para extremos locais.

O princípio de máximo forte tem como consequência imediata o seguinte resultado em que são comparados valores na fronteira e no interior e que é conhecido como *princípio de máximo fraco* :

Proposição 3.7.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $u \in C^0(\overline{\Omega})$ verificando* (3.18). *Então*

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x). \tag{3.19}$$

Em particular isto é válido se u é harmónica em Ω e contínua em $\overline{\Omega}$.

Podemos agora verificar que:

Proposição 3.7.3. *Todas as funções contínuas verificando a igualdade do teorema do valor médio num aberto são necessariamente harmónicas.*

Demonstração. Com efeito seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y)\, dy$$

para toda a bola $B_r(x) \subset \Omega$. Então, se B fôr uma dessas bolas, consideremos a função harmónica h que tem os mesmos valores que u sobre ∂B e é contínua na bola fechada (resolvendo portanto o problema de Dirichlet nessa bola via a fórmula integral de Poisson). Podemos aplicar a Proposição anterior a $u - h$ em $\overline{B}$ para concluir que $u = h$ em B. ■

Exemplo. *O exercício seguinte descreve um método elementar para resolver a seguinte questão:*
Seja $c \in \mathbb{R}$. Determinar para que abertos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ existe uma solução do problema

$$\begin{cases} \Delta u + 1 = 0, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = c, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.20}$$

A resolução deste problema deve-se a Hans Weinberger [33] *e James Serrin* [25]*. O método de Weinberger é totalmente elementar e é descrito a seguir.*

Exercício 3.10. *Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado e conexo com fronteira regular. Definem-se $r = |x|$, $\frac{\partial}{\partial r} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{r} \frac{\partial}{\partial x_i}$, ν a normal exterior a $\partial\Omega$. Mostre que:*

a) Se $u = 0$ em $\partial\Omega$ então

$$\int_\Omega r \frac{\partial u}{\partial r} \Delta u - u\, \Delta \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) dx = \int_{\partial\Omega} r \frac{\partial r}{\partial \nu} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 dS.$$

b) Se $u = 0$ e $\frac{\partial u}{\partial \nu} = c \in \mathbb{R}$ em $\partial\Omega$ então

$$\int_{\partial\Omega} r \frac{\partial r}{\partial \nu} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 dS = nc^2 |\Omega|.$$

c) Se $\Delta u + 1 = 0$ *em* Ω *então* u *é analítica em* Ω.

d) Se $\Delta u + 1 = 0$ *em* Ω *então* $\Delta\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = -2$.

e) As soluções de (3.20) *satisfazem*

$$\int_\Omega \left(2u - r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\, dx = nc^2|\Omega|.$$

f) As soluções de (3.20) *satisfazem*

$$\int_\Omega r\frac{\partial u}{\partial r}\, dx = \int_\Omega \nabla(\tfrac{1}{2}r^2)\cdot\nabla u\, dx = -n\int_\Omega u\, dx.$$

g) As soluções de (3.20) *satisfazem*

$$(n+2)\int_\Omega u\, dx = nc^2|\Omega|.$$

h) Se u *é uma solução de* (3.20) *então ou*

$$|\nabla u|^2 + \frac{2}{n}u < c^2 \qquad \text{em } \Omega$$

ou

$$|\nabla u|^2 + \frac{2}{n}u = c^2 \qquad \text{em } \Omega.$$

i) Usando (f) e (g) obtemos que

$$|\nabla u|^2 + \frac{2}{n}u$$

é constante em Ω *se* u *é uma solução de* (3.20).

j) Temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{1}{n}\delta_{ij}$$

em que δ_{ij} *é o símbolo de Kronecker.*

k) O aberto Ω *é necessariamente uma bola. Calcule todas as soluções clássicas de* (3.20).

▲

3.8 Ainda o teorema do valor médio

O teorema do valor médio é um resultado central no estudo clássico da equação de Laplace e da equação de Poisson. Para além do princípio de máximo convém destacar desde já outras aplicações. A primeira deverá ser familiar ao leitor que conhece alguma análise complexa[8].

Teorema 3.8.1 (Liouville)**.** *Seja* $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma função harmónica limitada. Então* u *é constante.*

[8] Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função diferenciável. Então f é analítica em Ω e, se $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ com u e v funções com valores em $\mathbb{R}$, u e v satisfazem as condições de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ pelo que as funções u e v são funções harmónicas em Ω.

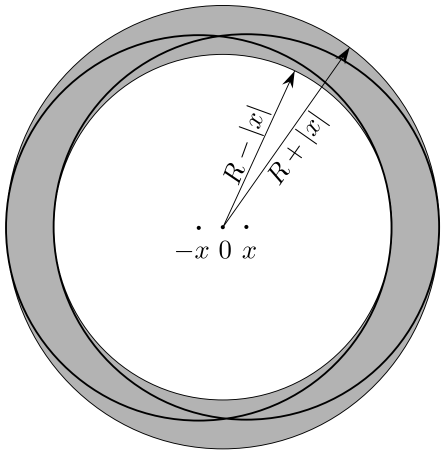

Figura 3.3: As estimativas na demonstração do teorema de Liouville.

Demonstração. A ideia base da demonstração é usar o teorema do valor médio para mostrar que existe uma constante $C > 0$ tal que para todo o $R > 0$ devemos ter $|u(x) - u(-x)| \leq C/R$ o que implicará que u é constante por translacção. Para tal usa-se o teorema do valor médio para exprimir $u(x)$ e $u(-x)$ como médias em bolas de raio R centradas em x e $-x$ e mostra-se que a diferença entre essas médias é da ordem de $V(R)/R^n$ em que $V(R)$ é o volume da região sugerida a cinzento na Figura 3.3 e que este por sua vez é da ordem de R^{n-1}. Seja M um majorante de $|u|$. O cálculo detalhado é

$$\begin{aligned} |u(x) - u(-x)| &= \frac{n}{\omega_n R^n} \left| \int_{B_R(x)} u(y)\,dy - \int_{B_R(-x)} u(y)\,dy \right| \\ &\leq \frac{Mn}{\omega_n R^n} \int_{R-|x|<|y|<R+|x|} dy \\ &\leq \frac{Mn(R+|x|)^{n-1}}{R^n}. \end{aligned}$$

■

Outro tipo de aplicação é a obtenção das desigualdades de Harnack e de teoremas relativos à convergência de sucessões de funções harmónicas.

Proposição 3.8.2. *Seja $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções harmónicas definidas num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ uniformemente convergentes nos subconjuntos compactos de Ω para uma função u. Então u é uma função harmónica.*

Demonstração. Da convergência uniforme segue com facilidade que o limite é uma função contínua satisfazendo a igualdade do valor médio e daí que u é harmónica. ■

As chamadas *desigualdades de Harnack* permitem obter outros resultados deste tipo.

Teorema 3.8.3 (Desigualdades de Harnack)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Para cada aberto conexo $\omega \Subset \Omega$ existe $C > 0$ tal que para toda a função harmónica positiva $u : \Omega \to \mathbb{R}$*

$$\sup_{x\in\omega} u(x) \leq C \inf_{x\in\omega} u(x)$$

Demonstração. Começamos por estabelecer a desigualdade para bolas de raio suficientemente pequeno e contidas em Ω. Seja $x_0 \in \Omega$ e $r > 0$ tal que $B_{4r}(x_0) \subset \Omega$. Sejam $x_1, x_2 \in B_r(x_0)$. Usando a igualdade do valor médio em bolas obtemos

$$u(x_1) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_1)} u \leq \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_{2r}(x_0)} u,$$

$$u(x_2) = \frac{n}{\omega_n 3r^n} \int_{B_{3r}(x_2)} u \geq \frac{n}{\omega_n 3r^n} \int_{B_{2r}(x_0)} u.$$

pelo que

$$\sup_{x \in B_r(x_0)} u(x) \leq 3^n \inf_{x \in B_r(x_0)} u(x). \tag{3.21}$$

Sejam agora $y, z \in \overline{\omega}$ tais que

$$\begin{aligned} u(y) &= \min_{x \in \overline{\omega}} u(x), \\ u(z) &= \max_{x \in \overline{\omega}} u(x). \end{aligned}$$

Como ω é conexo existe um arco L unindo y a z e contido em $\overline{\omega}$. Seja $0 < 4r < \operatorname{dist}(\overline{\omega}, \partial\Omega)$. Existe um número finito, N, de bolas de raio r que cobrem $\overline{\omega}$ e consequentemente cobrem L. Aplicando a desigualdade (3.21) sucessivamente à subfamília de tais bolas que cobre L obtém-se

$$u(z) \leq 3^{nN} u(y).$$

■

A desigualdade de Harnack tem como consequência imediata podermos, nalgumas circunstâncias, passar de convergência pontual a convergência uniforme em compactos. Por exemplo:

Teorema 3.8.4. *Seja $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sucessão monótona de funções harmónicas definidas num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ que converge num ponto $x \in \Omega$. Então u_k converge uniformemente para uma função harmónica em cada aberto conexo ω tal que $x \in \omega \Subset \Omega$.*

Demonstração. O princípio do máximo forte 3.7.1 permite supôr que a sucessão é estritamente crescente na componente conexa que contém x. Dado $\epsilon > 0$ existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $k > j > j_0$ temos $0 < u_k(x) - u_j(x) < \epsilon$. Mas então pela desigualdade de Harnack também $0 < u_k(y) - u_j(y) < C\epsilon$ para todo o $y \in \omega$ mostrando que existe convergência em ω, que esta é uniforme e o limite uma função harmónica graças à proposição 3.8.2. ■

3.9 O método de Perron

O *método de Perron* aplica-se à resolução do problema de Dirichlet clássico para a equação de Laplace:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{em } \Omega, \\ u = \varphi, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.22}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto limitado e $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ é uma aplicação contínua. Nem sempre conseguiremos obter a existência duma solução, veja-se o exemplo a seguir ao Teorema 3.9.5, mas obteremos condições suficientes muito gerais relativas à geometria local de $\partial\Omega$.

Antes de descrever o método de Perron precisaremos de estabelecer alguns resultados preliminares e definir (ou redifinir) alguns conceitos.

Definição 3.9.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $w : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Diz-se que w é subharmónica (superharmónica) em Ω se para toda a bola $B \subset \Omega$ e toda a função contínua $h : \overline{B} \to \mathbb{R}$ harmónica em B e tal que $h \geq (\leq) w$ sobre ∂B temos $h \geq (\leq) w$ em B.*

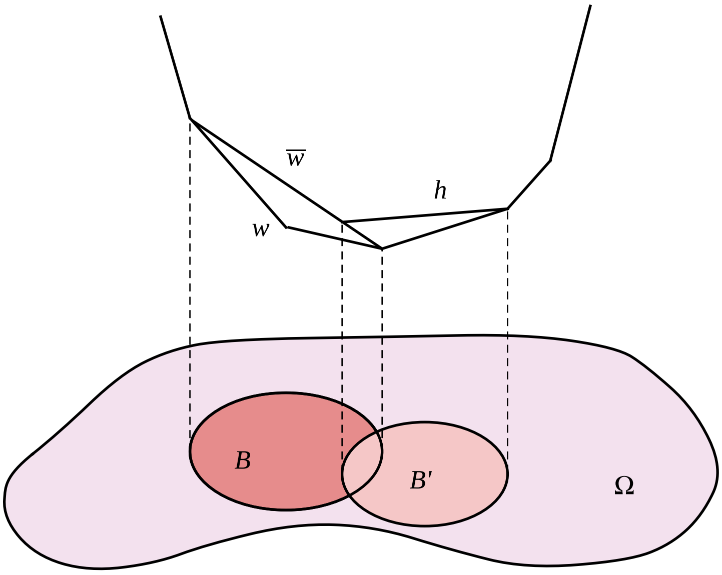

Figura 3.4: Levantamento harmónico.

Exercício 3.11. *Verifique que a definição anterior é uma extensão da definição feita na Secção 3.6 para funções C^2.*

Às funções w subharmónicas em Ω, definidas e contínuas em $\overline{\Omega}$, e tais que $w \leq \varphi$ sobre $\partial\Omega$ chamaremos *subfunções* relativas ao Problema 3.22. Definem-se *superfunções* da forma óbvia.

A solução do problema 3.22 vai ser obtida[9] tomando o supremo de todas as subfunções. Para se verificar que esse supremo é de facto uma função harmónica recorreremos à técnica do *levantamento harmónico*.

Proposição 3.9.2 (Levantamento Harmónico)**.** *Seja $w : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função subharmónica. Dada uma bola $B \subset \Omega$ defina-se uma função $\overline{w} : \Omega \to \mathbb{R}$ como sendo igual a w em $\Omega \setminus B$ e igual à solução do problema de Dirichlet para a equação de Laplace em B com valores sobre $\partial\Omega$ iguais aos de w em $\overline{B}$. Então $\overline{w}$ é uma função subharmónica em Ω.*

Demonstração. Claro que $\overline{w}$ está bem definida graças a termos resolvido o problema de Dirichlet numa bola e é uma função contínua satisfazendo $\overline{w} \geq w$. Basta então demonstrar que dando uma bola $B' \subset \Omega$ e uma função h harmónica em B', contínua em $\overline{B'}$ e satisfazendo $h \geq \overline{w}$ sobre $\partial B'$ temos necessariamente $h \geq \overline{w}$ em B'.

Note-se primeiro que em $\partial B'$ temos $h \geq \overline{w} \geq w$ donde $h \geq w$ em B'. Como em $B' \setminus B$ temos $\overline{w} = w$ podemos afirmar que $h \geq \overline{w}$ em $B' \setminus B$.

Por outro lado em $B' \cap B$ temos que tanto h como $\overline{w}$ são harmónicas. Em $\partial B' \cap B$ temos $h \geq \overline{w}$ por definição de h. O mesmo acontece em $\partial B \cap B'$ como já tínhamos visto. Pode assim aplicar-se o princípio de máximo a $h - \overline{w}$ em $B' \cap B$ para concluir que $h \geq \overline{w}$. ∎

Observe-se também as seguintes consequências quase imediatas das definições:

Proposição 3.9.3. *O supremo de um número finito de subfunções é uma subfunção.*

Proposição 3.9.4. *O princípio de máximo forte é válido para funções subharmónicas.*

[9] O método de Perron permite sempre obter uma subfunção harmónica. Se esta verifica ou não os valores pretendidos sobre $\partial\Omega$ vai depender da geometria de $\partial\Omega$. De facto obtemos uma solução do problema 3.22 para uma classe suficiente geral de domínios com fronteira regular num sentido a precisar.

Teorema 3.9.5 (Perron). *O supremo de todas as subfunções é uma função harmónica em Ω.*

Demonstração. Designamos por S_φ o conjunto de todas as subfunções. Notamos que a função constante e igual a $\min \varphi$ está em S_φ pelo que o supremo está bem definido. Tomamos

$$w = \sup_{v \in S_\varphi} v.$$

Pelo princípio de máximo $w(x) \leq \max \varphi$ para todo o $x \in \overline{\Omega}$.

Seja agora $x \in \Omega$. Existirá então uma sucessão $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset S_\varphi$ tal que $u_j(x) \to w(x)$ quando $j \to \infty$. Se tomarmos $w_k = \max_{1\leq j\leq k} u_j$ verificamos que cada w_k é uma subfunção, $w_{k+1} \geq w_k$ para todo o $k \in \mathbb{N}$, e ainda $w_k(x) \to w(x)$ quando $k \to \infty$. Seja agora $B \Subset \Omega$ uma bola centrada em x e designe-se por $\overline{w}_k$ o levantamento harmónico de w_k relativo a B. O princípio de máximo implica que $\overline{w}_{k+1} \geq \overline{w}_k \geq w_k$ para todo o $k \in \mathbb{N}$. Como cada $\overline{w}_k$ ainda é uma subfunção temos $\overline{w}_k(x) \to w(x)$ quando $k \to \infty$. Do Teorema 3.8.4 segue que $(\overline{w}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão uniformemente convergente para uma função harmónica $\overline{w}$ em B.

Bastará agora provar que $\overline{w} = w$ em B. Como $\overline{w}$ é o supremo de uma subfamília de S_φ devemos ter $\overline{w} \leq w$. Se existisse um ponto $\overline{x}$ onde $w(\overline{x}) > \overline{w}(\overline{x})$ deveríamos ter, para algum $v \in S_\varphi$, $v(\overline{x}) > \overline{w}(\overline{x})$. Defina-se, para todo o $k \in \mathbb{N}$, $v_k = \max\{\overline{w}_k, v\}$ e $\overline{v}_k$ como sendo o levantamento harmónico de v_k em B. Como atrás temos que $\overline{v}_k$ converge para uma função harmónica em B que satisfaz $\overline{v} \geq \overline{w}$ e $\overline{v}(x) = \overline{w}(x)$. Pelo princípio do máximo forte podemos concluir que $\overline{v} = \overline{w}$ em B e consequentemente $\overline{w} = w$ em B. ∎

A função harmónica cuja existência é assegurada pelo teorema anterior é designada como *solução de Perron.* Não é necessariamente uma função cujos limites relativos a pontos de $\partial\Omega$ coincidam com os valores de φ. Uma condição necessária e suficiente para que tal aconteça para toda a função $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ envolve o conceito de *barreira.*

Definição 3.9.6. *Seja $x \in \partial\Omega$. Diz-se que existe uma barreira em x se existir uma função contínua em $\overline{\Omega}$, superharmónica em Ω, positiva em $\overline{\Omega} \setminus \{x\}$ e nula em x. Diremos que um ponto $x \in \partial\Omega$ é regular*[10] *se existir uma barreira em x.*

Teorema 3.9.7. *O problema de Dirichlet* (3.22) *tem solução para toda a função contínua $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ se e só se cada ponto de $\partial\Omega$ fôr regular.*

Demonstração. Seja $x \in \partial\Omega$ um ponto regular. Seja u a função harmónica cuja existência estabelecemos no Teorema de Perron (3.9.5) e seja z uma barreira em x. Bastará provar que para cada $\epsilon > 0$ temos

$$\overline{\lim_{\substack{y\to x\\ y\in\Omega}}} |u(y) - \varphi(x)| \leq \epsilon.$$

Isto será obtido se provarmos que para cada $\epsilon > 0$ existem uma subfunção s_ϵ e uma sobrefunção S_ϵ tais que

$$\overline{\lim_{\substack{y\to x\\ y\in\Omega}}} S_\epsilon(y) - s_\epsilon(y) \leq \epsilon.$$

Para construir S_ϵ e s_ϵ usamos a barreira z. Fixemos então $\epsilon > 0$. Bastará agora provar que para $k > 0$ suficientemente grande podemos tomar

$$S_\epsilon(y) = kz(y) + \epsilon + \varphi(x),$$
$$s_\epsilon(y) = -kz(y) - \epsilon + \varphi(x).$$

Não há dúvida que tais funções são respectivamente superharmónica e subharmónica. Seja $\delta > 0$ tal que $|\varphi(y) - \varphi(x)| < \epsilon$ se $y \in B_\delta(x) \cap \partial\Omega$ e seja $M = \max_{y\in\partial\Omega} |\varphi(y)|$. Escolha-se $k > 0$ de maneira a

$$k \min_{y\in\partial\Omega\setminus B_\delta(x)} z(y) > 2M.$$

[10] *Não confundir com o uso de "regular" na expressão* fronteira regular.

Podemos então obter as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned} kz(y)+\epsilon+\varphi(x) &\geq \epsilon+\varphi(x) > \varphi(y) && \text{para } y\in\partial\Omega\cap\overline{B_\delta(x)},\\ kz(y)+\epsilon+\varphi(x) &> 2M+\varphi(x)\geq\varphi(y)+M-M=\varphi(y) && \text{para } y\in\partial\Omega\setminus B_\delta(x). \end{aligned}$$

Assim provou-se que com k suficientemente grande $kz(y)+\epsilon+\varphi(x)$ é uma superfunção, logo um majorante de u, e analogamente $-kz(y)-\epsilon+\varphi(x)$ é uma subfunção, logo um minorante de u.

Para demonstrar o recíproco basta notar que se existe solução do Problema 3.22 para qualquer função contínua φ podemos considerar para φ uma função que é 0 num ponto $x\in\partial\Omega$ e positiva em $\partial\Omega\setminus\{x\}$, por exemplo $\varphi(y)=|x-y|$. A respectiva solução do problema de Dirichlet é uma barreira. ■

Torna-se então necessário identificar condições suficientes simples que permitam garantir a existência de uma barreira. Provavelmente a mais simples é

Proposição 3.9.8 (Condição da esfera exterior)**.** *Se $x\in\partial\Omega$ é tal que existe uma bola fechada B tal que $B\cap\Omega=\{x\}$ então x é um ponto regular.*

Demonstração. Suponha-se que $B=\overline{B_r(x_0)}$. Tome-se $w(y)=-\Gamma_{x_0}(y)+\Gamma_{x_0}(x)$. Então w é uma barreira em x. ■

Exercício 3.12. *Prove que se $\partial\Omega$ é C^2 numa vizinhança de x então verifica-se a condição da esfera exterior e x é regular. Mostre que tal não é necessariamente verdade se $\partial\Omega$ fôr C^1.*

A condição da esfera exterior pode ser melhorada facilmente. Por exemplo:

Exercício 3.13. *Seja $n>2$ e considere-se a função $w:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definida por $w(x_1,\dots,x_n)=x_1-\sqrt{\sum_{i=2}^n x_i^2}$. Verifique que w é uma função superharmónica. Prove que se $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ é um aberto com $n>2$, $x\in\partial\Omega$ e existe um cone*[11] *fechado C com interior não vazio tal que $C\cap\overline{\Omega}=\{x\}$ então x é um ponto regular. Esta condição designa-se por* condição do cone exterior.

Em dimensão 2 o uso de resultados elementares de Análise Complexa permite obter condições ainda mais finas. Considere-se a aplicação $\mathbb{C}\setminus S\ni z\mapsto w(z)=\frac{1}{\log z}$ em que S é um arco simples unindo 0 a ∞ e $\log z$ está definido de maneira a ser uma função analítica em $\mathbb{C}\setminus S$. Se escrevermos $w=u+iv$ com u e v reais estas funções são harmónicas. Se usarmos coordenadas polares $z=re^{i\theta}$, com θ definido de forma adequada, obtemos

$$w(z)=\frac{1}{\log r+i\theta}=\frac{\log r-i\theta}{\log^2 r+\theta^2}$$

Note-se que $u<0$ e harmónica em $B_1(0)\setminus S$ e $\lim_{r\downarrow 0}u=0$. Estes factos podem ser usados para provar

Exercício 3.14. *Seja $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ um aberto limitado, $x\in\partial\Omega$ tal que existe um arco simples L unindo x a ∞ e tal que $L\setminus\{x\}\subset\mathbb{R}^2\setminus\overline{\Omega}$. Então x é um ponto regular.*

Os resultados anteriores ainda podem ser melhorados usando o facto de poder provar-se que o conceito de barreira tem carácter local.

Proposição 3.9.9. *Seja $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $x\in\partial\Omega$. Se existe $r>0$ tal que x é regular relativamente a $B_r(x)\cap\Omega$ então x é regular relativamente a Ω.*

Demonstração. Seja w uma barreira em x relativamente a $B_r(x)\cap\Omega$ e defina-se $m=\min_{\partial B_r(x)\cap\overline{\Omega}}w$. Temos $m>0$. Se definirmos

$$\overline{w}(x)=\begin{cases}\min\{w(x),m\} & \text{se } x\in\overline{B_r(x)}\cap\overline{\Omega}\\ m & \text{se } x\in\overline{\Omega}\setminus\overline{B_r(x)}\end{cases}$$

então $\overline{w}$ é uma barreira em x relativamente a Ω. ■

[11] *$C\subset E$, com E um espaço vectorial, diz-se um cone se existir um ponto $v\in E$ tal que para todo o $\alpha>0$ e $x\in C$ temos $v+\alpha(x-v)\in C$.*

Exercício 3.15. *Use a Proposição* 3.9.9 *para melhorar os resultados dos Exercícios* 3.13 *e* 3.14.

Exercício 3.16. *Seja* $\Omega = B_2(0) \setminus \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_1 \leq 1\}$ *e considerem-se funções contínuas* $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *tais que* $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1)$ *e* $\varphi : \partial B_2(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. *Considere o problema*

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{em } \Omega \\ u = \varphi, & \text{para } |x| = 2 \\ \lim_{\substack{(x_1,x_2)\to(x_0,0) \\ x_2>0}} u(x_1, x_2) = f(x_0), & \text{para } |x_0| \leq 1 \\ \lim_{\substack{(x_1,x_2)\to(x_0,0) \\ x_2<0}} u(x_1, x_2) = g(x_0), & \text{para } |x_0| \leq 1 \end{cases}$$

a) *Justifique que existe uma solução única do problema.*

b) *Suponha que as funções* φ, f, g *satisfazem as relações de simetria* $\varphi(x_1, x_2) = -\varphi(-x_1, x_2)$, $f(x_1) = -f(-x_1)$, $g(x_1) = -g(-x_1)$. *Poderá garantir que* $u(0, x_2) = 0$ *para todo o* $(0, x_2)$ *em* Ω*?*

Em dimensão 2 um exemplo de ponto não regular será necessariamente um ponto isolado da fronteira. Que tal é o caso verifica-se no exercício 3.18. Discutimos agora um exemplo de um ponto não regular em dimensão $n = 3$.

Exemplo. (Lebesgue) *Em* $\mathbb{R}^3$ *considere o potencial de tipo coulombiano criado por uma carga concentrada sobre o segmento* $[0, 1]$ *do eixo dos* xx *com densidade* $d(x) = x$. *Tal potencial pode exprimir-se como um integral*

$$V(x, y, z) = \int_0^1 \frac{t\, dt}{\sqrt{(t - x)^2 + r^2}} \qquad \text{em que } r^2 = y^2 + z^2.$$

Se avaliar o integral verificará que $V(x, y, z) = A(x, r) - 2x \log r$ *em que* A *verifica* $A(x, r) \to 0$ *quando* $(x, r) \to 0$. *Pode verificar com facilidade que todas as equipotenciais da forma* $V(x, y, z) = 1 + c$, $c > 0$ *têm a origem como ponto de acumulação. Tal observação permite verificar que o problema de Dirichlet clássico para a equação de Laplace no complementar do aberto limitado por uma tal equipotencial não é um problema bem posto. É fácil, à custa duma inversão (ver Problema 3.6), transformar este exemplo de maneira a obter o exemplo desejado para um aberto limitado com um ponto não regular na fronteira. Observe que a fronteira numa vizinhança do ponto não regular é uma superfície tipo cúspide.* ▲

3.10 A equação de Poisson

Analisamos agora o problema

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{num aberto limitado } \Omega, \\ u = \varphi & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.23}$$

em que $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$, todos os pontos de $\partial\Omega$ são regulares e em que f será "suficientemente regular". Estaremos interessados em estabelecer qual a regularidade mínima a exigir a f.

Comecemos por observar na fórmula de representação integral (3.9) que se u é uma solução da equação de Poisson em $C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ nula e com derivada normal nula sobre $\partial\Omega$ então vale a representação

$$u(x) = \int_\Omega \Gamma_x \Delta u\, dy$$

Tal sugere procurar uma solução particular da equação de Poisson através de

$$w(x) = \int_\Omega \Gamma_x f\, dy. \tag{3.24}$$

A função w assim definida é designada por *potencial de Newton* de f. Se justificarmos esta ideia obteremos

Teorema 3.10.1. *Se o potencial de Newton fôr uma solução da equação de Poisson prolongável continuamente a $\partial\Omega$ e todos os pontos de $\partial\Omega$ fôrem regulares então a solução do problema (3.23) é dada por*

$$u(x) = v(x) + w(x)$$

em que w designa o potencial de Newton de f e v a solução do problema

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \textit{em } \Omega, \\ v = \varphi - w & \textit{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.25}$$

Antes de enunciar o resultado que temos em mente convirá convencer o leitor de que, de uma forma algo surpreendente, não basta que f seja contínua para existir uma solução C^2 da equação de Poisson.

Exercício 3.17. *Seja $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o polinómio $P(x_1, x_2) = x_1 x_2$ e $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $\eta \equiv 1$ se $|x| < 1$ e considere-se uma sucessão $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $c_k \to 0$ quando $k \to \infty$ e $\sum c_k$ é divergente. Defina*

$$f(x) = \sum_0^\infty c_k \Delta(\eta P)(2^k x).$$

Prove que f é contínua mas que a equação de Poisson $\Delta u = f$ não tem nenhuma solução que seja C^2 numa vizinhança de 0.

Para enunciarmos um resultado de existência razoavelmente lato para a equação de Poisson necessitaremos do conceito de *função Hölderiana* com expoente ϵ.

Definição 3.10.2. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \epsilon < 1$. Dizemos que $f : U \to \mathbb{R}^m$ é de classe $C^{0,\epsilon}(U)$ em U, ou uniformemente contínua à Hölder em U com expoente $\epsilon > 0$, se existir $M > 0$ tal que para todos os $x, y \in U$ temos*

$$|f(x) - f(y)| \le M|x - y|^\epsilon. \tag{3.26}$$

Diremos que f é de classe $C^{k,\epsilon}(U)$ se fôr k vezes diferenciável em U e para cada multi-índice α com $|\alpha| = k$ tivermos $D^\alpha f \in C^{0,\epsilon}$.

Diremos que $f \in C^{0,\epsilon}_{loc}(U)$ ou que é localmente contínua à Hölder em U se fôr uniformemente contínua à Hölder em cada limitado $K \subset U$. De forma similar define-se $C^{k,\epsilon}_{loc}(U)$.

Para $\epsilon = 1$ as mesmas definições conduzem ao conceito de funções Lipschitzianas.

Passamos a estabelecer resultados de diferenciabilidade para o potencial newtoniano. Note que a regra de Leibniz não é aplicável para cálculo das segundas derivadas devido a $\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x_i^2}$ não ser integrável numa vizinhança de 0.

Lema 3.10.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função limitada e localmente Hölderiana em Ω prolongada trivialmente a $\mathbb{R}^n$ e seja w o potencial newtoniano de f. Então $w \in C^2(\Omega)$ e para todo o $x \in \Omega$ temos*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \int_A \frac{\partial^2\Gamma}{\partial x_i x_j}(x-y)(f(y) - f(x))\, dy + f(x)\int_A \frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}(x-y)\nu_j(y)\, dS(y) \tag{3.27}$$

para $i, j = 1, \ldots, n$, em que A é uma região limitada contendo Ω para a qual é aplicável o teorema da divergência.

Demonstração. Deixamos ao cuidado do leitor estabelecer através da aplicação duma versão conveniente da regra de Leibniz ou por um processo *ad hoc* do tipo do que irá utilizar-se a seguir que $w \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = \int_\Omega \frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}(x-y)f(y)\, dy$$

Designemos então por $u(x)$ o segundo membro de (3.27). Notamos que está bem definido graças a Γ verificar a estimativa

$$\left|\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right| \le C|x-y|^{-n}$$

em que $C > 0$ e f é hölderiana. Por outro lado seja $v(x) = \frac{\partial w}{\partial x_i}$ e defina-se

$$v_k(x) = \int_\Omega \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y)\eta_k(x-y)f(y)\,dy$$

em que $\eta_k(y) = \eta(k|y|)$ com $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ uma função fixa que satisfaz $0 \le \eta \le 1$, $0 \le \eta' \le 2$, $\eta(t) = 0$ para $t \le 1$, $\eta(t) = 1$ para $t \ge 2$. Claro que não existe qualquer problema em diferenciar v_k sob o sinal de integral obtendo-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_k}{\partial x_j} &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\eta_k \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}\right)(x-y)f(y)\,dy \\
&= \int_A \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\eta_k \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}\right)(x-y)(f(y)-f(x))\,dy \\
&\quad + f(x)\int_A \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\eta_k \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}\right)(x-y)\,dy \\
&= \int_A \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\eta_k \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}\right)(x-y)(f(y)-f(x))\,dy \\
&\quad + f(x)\int_{\partial A}\left(\eta_k \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}\right)(x-y)\nu_j\,dS(y)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

desde que k seja suficientemente grande, em particular $\operatorname{dist}(x,\partial\Omega) > 2/k$. Subtraindo termo a termo (3.28) de (3.27) e estimando obtém-se

$$\begin{aligned}
\left|u(x) - \frac{\partial v_k}{\partial x_j}(x)\right| &= \left|\int_{|x-y|\le 2/k} \frac{\partial}{\partial x_j}\left((1-\eta_k)\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}\right)(f(y)-f(x))\,dy\right| \\
&\le C\int_{|x-y|\le 2/k}\left(\left|\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x_j\partial x_i}\right| + 2k\left|\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}\right|\right)|x-y|^\epsilon\,dy \\
&\le C\left(\frac{n}{\epsilon}+4\right)(2/k)^\epsilon
\end{aligned}$$

em que C designa a constante da desigualdade (3.26) relativa a um compacto $K \Subset \Omega$ e $k \in \mathbb{N}$ é suficientemente grande de maneira a $\{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) > 2/k\} \supset K$. Verificamos então que temos convergência uniforme de $\frac{\partial v_k}{\partial x_i}$ para u e de v_k para v nos subconjuntos compactos de Ω. Isto implica que $u = \frac{\partial v}{\partial x_i}$. ∎

É uma consequência quase imediata deste resultado e do método de Perron:

Teorema 3.10.4. *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com Ω um aberto limitado cujos pontos fronteiros são regulares no sentido de (3.9.6). Suponha-se que f é limitada e localmente hölderiana em Ω. Seja $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então o problema*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = \varphi & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.29}$$

tem uma solução única $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

3.11 Soluções fracas da equação de Laplace

Para contrastar ainda mais as propriedades do Laplaciano com as dos operadores diferenciais parciais de primeira ordem analisados no Capítulo 2 consideramos agora o que se passa quanto a soluções fracas da equação de Laplace no quadro das funções localmente integráveis[12].

Definição 3.11.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $v : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função localmente integrável em Ω, i.e. , $v \in L^1_{loc}(\Omega)$. Diz-se que v é uma* solução fraca da equação de Laplace em Ω *se para toda a função $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ temos*

$$\int_\Omega \Delta\varphi(x)v(x)\,dx = 0.$$

Facilmente se verifica usando, por exemplo, as fórmulas de Green que toda a função harmónica no sentido clássico é também uma solução fraca. Que não existem outras é a conclusão do

Proposição 3.11.2 (Lema de Weyl)**.** *As soluções fracas localmente somáveis da equação de Laplace são soluções clássicas.*

Demonstração. Seja u uma solução fraca localmente integrável da equação de Laplace num aberto Ω. Basta provar o resultado localmente logo vamos considerar que u é integrável e prolongamos trivialmente u ao complementar de Ω.

Considere-se uma sucessão de molificadores[13] $(\rho_\epsilon)_{\epsilon>0}$ e as funções regularizadas u_ϵ definidas por $u_\epsilon \equiv u * \rho_\epsilon$. É fácil verificar que dado $\omega \Subset \Omega$ existe ϵ_0 tal que para $\epsilon < \epsilon_0$ cada u_ϵ é harmónica no sentido clássico em ω e portanto verifica a igualdade do valor médio em ω. Tal igualdade permite obter a convergência uniforme de u_ϵ para u em $\omega_1 \Subset \omega$ a partir da convergência em $L^1(\omega)$. Logo u é uma função contínua e a conclusão segue do recíproco do teorema do valor médio. ■

[12] O leitor familiar com teoria das distribuições e com o conceito de *hipo-elipticidade* sabe provavelmente que os resultados desta secção são extremamente generalizáveis.

[13] Ver o Apêndice B.

3.12 Exercícios suplementares

Exercício 3.18. *Em dimensão $n \geq 3$, seja $B' = B_1(0) \backslash \{0\}$ e $u : B' \to \mathbb{R}$ uma função harmónica tal que a função $x \mapsto |x|^{n-2}u(x)$ é limitada.*

a) *Mostre que existe uma função harmónica v definida em $B_1(0)$ e uma constante $c \in \mathbb{R}$ tais que $u - v = \frac{c}{|x|^{n-2}}$.*

b) *Enuncie e demonstre o resultado análogo em dimensão 2.*

c) *Por inversão obtenha resultados relativos a funções harmónicas em certas regiões ilimitadas. Enuncie e demonstre tais resultados.*

Exercício 3.19. *Seja $\Omega \subset B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ um domínio regular . Para $n \geq 3$, $k > R$ designamos por u_k a solução do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u_k = 0, & \text{em } B_k(0) \setminus \overline{\Omega} \\ u_k = 1, & \text{sobre } \partial\Omega \\ u_k = 0, & \text{sobre } \partial B_k(0) \end{cases}$$

a) *Justifique que os u_k's estão bem definidos.*

b) *Mostre que existe*

$$\lim_{k>R, k\to\infty} u_k(x)$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

c) *Mostre que existe uma solução única do problema*

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{em } \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \\ u = 1, & \text{sobre } \partial\Omega \\ \lim_{x\to\infty} u(x) = 0. \end{cases}$$

Exercício 3.20. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto, limitado, e com fronteira seccionalmente regular. Suponha-se que existe uma função de Green $G_\Omega : \overline{\Omega} \times \Omega \setminus \{(x,x) : x \in \Omega\} \to \mathbb{R}$ relativa ao operador laplaciano, Δ, isto é, $G_\Omega(x,y) = h_\Omega(x,y) + \Gamma(x,y)$ em que h_Ω é uma solução do problema*

$$\begin{cases} \Delta_x h_\Omega(x,y) = 0, & \text{para todos os } x, y \in \Omega, \\ h_\Omega(x,y) = -\Gamma(x,y), & \text{para todo o } x \in \partial\Omega \text{ e todo o } y \in \Omega. \end{cases} \tag{3.30}$$

em que Γ designa a solução fundamental da equação de Laplace que como se sabe é dada por

$$\Gamma(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(2-n)\omega_n}|x-y|^{2-n}, & n > 2, \\ \frac{1}{2\pi}\log|x-y|, & n = 2. \end{cases} \tag{3.31}$$

para todos os $y \in \Omega$, $x \in \overline{\Omega} \setminus \{y\}$.

Prove que:

a) *$G_\Omega(x,y) < 0$ para todos os $x, y \in \Omega$,*

b) *$G_\Omega(x,y) = G_\Omega(y,x)$ para todos os $x, y \in \Omega$,*

c) *Para toda a bola B tal que $B \supset \overline{\Omega}$ temos*

$$G_B(x,y) \leq G_\Omega(x,y) < 0$$

para todos os $y \in \Omega$, $x \in \overline{\Omega} \setminus \{y\}$.

d) Existe uma bola aberta B tal que as funções $G_B(\cdot, y)$, $y \in \Omega$ são uniformemente integráveis em Ω, isto é, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $A \subset \Omega$ é mensurável, $|A| < \delta$ então

$$\int_A |G_B(x,y)|\, dx < \epsilon \qquad \textit{para todo o } y \in \overline{\Omega} \tag{3.32}$$

e) Podemos substituir B por Ω em (3.32).

f) Para todo o $\gamma > 0$ temos

$$\int_{\Omega \setminus B_\gamma(y_0)} G_\Omega(x,y)\, dx \to 0$$

se $y \to y_0 \in \partial\Omega$.

g) As conclusões de (c) e (d) implicam que se $y \to y_0 \in \partial\Omega$ então

$$\int_\Omega G_\Omega(x,y)\, dx \to 0.$$

Capítulo 4

Classificação das equações lineares de 1ª ordem no plano

4.1 Introdução

Antes de nos debruçarmos sobre problemas relativamente gerais convém convencer o leitor que aquilo que foi realizado nos dois capítulos anteriores contém as sementes de algo bastante mais geral. O objecto deste capítulo, de qualquer forma ainda modesto, será o estudo com alguma generalidade de certas equações lineares $Lu = f$ em que L é um operador linear de segunda ordem da forma

$$Lu(x_1, x_2) = \sum_{i=1,2} a_{i,j}(x_1, x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1,2} b_i(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x_1, x_2)u(x_1, x_2).$$

A base do que se vai seguir consiste na observação elementar de que se pudermos decompor $L = L_1 L_2$ com L_1, L_2 operadores lineares reais de primeira ordem o problema de existência local de soluções poderia ser abordado pelo estudo sucessivo de duas equações lineares de primeira ordem. Veja-se por exemplo o exercício 2.9. Mais geralmente podemos com certeza obter um resultado de existência e unicidade local para um problema da forma

$$\begin{cases} L_1 L_2 u(x) = f(x), & \text{numa vizinhança de uma hipersuperfície } S \\ u|_S(x) = v_0(x), \\ L_2 u|_S(x) = v_1(x). \end{cases} \tag{4.1}$$

Para tal será natural impor L_1, L_2 suficientemente regulares e *condições de não caracteristicidade relativas a cada um dos problemas de primeira ordem.* Para compreendermos o papel de tais condições começamos por notar que prescrever os valores de $L_2 u$ sobre S pode com certeza ser feito se prescrevermos os valores da derivada normal $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ sobre S já que todas as derivadas tangenciais são prescritas por v_0.

Capítulo 5

Resultados gerais e contra-exemplos

5.1 O Problema de Cauchy geral

Se o leitor tem alguma familiaridade com equações diferenciais ordinárias mas não com equações diferenciais parciais poderá ter algumas expectivas que rapidamente se mostrarão infundadas. Por exemplo o resultado essencial sobre existência e unicidade de equações diferenciais ordinárias, o teorema de *Picard-Lindelöf*, não impõe restrições de regularidade fortes ao segundo membro duma equação diferencial ordinária na forma $y' = f(t, y)$. No entanto não existe um resultado análogo para equações diferenciais parciais gerais. Dos resultados de que disporemos dentro em pouco sobre existência de solução de equações diferenciais parciais o único com um âmbito comparável é o teorema de *Cauchy-Kowalewska*. Grosso modo garante a existência local de solução desde que a equação e os dados sejam analíticos (5.2.1). Não existem resultados similares mesmo quando a equação é linear e os coeficientes C^∞. De facto existem exemplos, só obtidos há menos de cinquenta anos e com um carácter não trivial, de equações lineares com coeficientes C^∞ para as quais não existe solução (5.4).

Não é de surpreender então que o estudo das equações diferenciais parciais envolva um esforço de classificação dos problemas a estudar. Tal classificação nunca poderá ser interpretado como um esquema rígido dado *a priori* mas algo que resulta naturalmente dos resultados que formos obtendo. Para iniciar tal estudo começaremos por tecer algumas considerações relativas a operadores diferenciais lineares e ao conceito de características.

Seja $Lu(x) \equiv \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x)$ um operador diferencial linear actuando sobre funções C^k definidas num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Para cada $x \in U$ define-se a *parte principal* ou *símbolo* deste operador como sendo o polinómio homogéneo de grau k $\sigma_x L(\xi) \equiv \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) \xi^\alpha$. Os $\xi \in \mathbb{R}^n$ tais que $\sigma_x L(\xi) = 0$ designem-se por *vectores característicos* de L no ponto x. O conjunto de todos os vectores característicos de L num ponto x designa-se por *variedade característica* de L em x.

Exemplo. *Considerem-se os seguintes operadores diferenciais lineares de segunda ordem e coeficientes constantes actuando sobre funções definidas em* $\mathbb{R}^{n+1}$*:*

$$\begin{aligned} \Delta u = & \sum_{i=0}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \\ \Box u = & \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}. \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} \sigma_x \Delta(\xi) = & \sum_{i=0}^n \xi_i^2 \\ \sigma_x \Box(\xi) = & \xi_0^2 - \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \end{aligned}$$

pelo que para Δ *a variedade característica reduz-se à origem e para* $\Box$ *é um cone* $n-1$ *dimensional*[1]. ▲

[1] Estes operadores serão estudados em detalhe nos Capítulos 3 e 9.

Definição 5.1.1 (Operador Elíptico)**.** *Um operador diferencial linear diz-se* elíptico *num ponto x se o seu símbolo $\sigma_x L(\xi)$ só se anular para $\xi = 0$.*

5.2 O Teorema de Cauchy-Kowalewska

Esta secção tem como objectivo a demonstração do :

Teorema 5.2.1 (Cauchy-Kowalewska)**.** *Considere-se o problema de Cauchy relativo a uma equação diferencial parcial de ordem k e uma hipersuperfície S com normal unitária ν*

$$F\left(x, (D^\alpha u_{0\leq|\alpha|\leq k})\right) = 0 \tag{5.1}$$

$$D_\nu^j u\Big|_S = \varphi_j, \qquad \text{para } j = 0, \ldots, k-1 \tag{5.2}$$

e em que S se supõe não característica num sentido a precisar. Se F, S e φ_j são analíticas existe uma solução analítica única de (5.1–5.2).

S ser uma hipersuperfície analítica siginifica que para cada ponto $x \in S$ existe uma vizinhança U_x de x e um difeomorfismo analítico $\theta_x : U_x \to \mathbb{R}^n$ tal que $\theta_x(S \cap U_x)$ é um subconjunto aberto de um hiperplano de $\mathbb{R}^n$. Este recurso a cartas locais permite então reduzir de imediato a demontração ao estabelecer a existência de uma solução analítica única numa vizinhança de 0 no caso em que S é o hiperplano $x_n = 0$ e a derivação $\frac{\partial}{\partial \nu}$ é substituída por $\frac{\partial}{\partial x_n}$.

A não caracteristicidade de S corresponde então, após a mudança de coordenadas descrita atrás, a que (COMPLETAR)

Bastará então demonstrar

Teorema 5.2.2. *Considere-se o problema de valores iniciais*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^n A_i(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i} + B(x,u) \tag{5.3}$$

$$u(x,0) = 0 \tag{5.4}$$

em que as funções A_i, $i = 1, \ldots, n$, e B são analíticas numa vizinhança da origem. Então existe uma solução analítica única deste problema numa vizinhança da origem.

Demonstração. Os desenvolvimentos de Taylor para os A_i's e para B serão válidos num intervalo de $\mathbb{R}^{n+N}$ definido por $|x_i| < R$ e $|u_j| < R$ para todos os i's e j's. COMPLETAR ∎

5.3 O Teorema de Holmgren

O *teorema de unicidade de Holmgren* é no essencial um corolário do teorema de Cauchy-Kowalewska obtido por "dualidade". Tal argumento de dualidade pode lembrar ao leitor resultados que conhece da Álgebra Linear ou talvez resultados de Análise Funcional como a *alternativa de Fredholm.*

Começamos por considerar uma versão local do teorema para sistemas de primeira ordem. Considere-se o sistema

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^n a_i(x) D_i u + b(x)u = 0$$

em que os a_i e b têm como valores matrizes reais $N \times N$ e as incógnitas u são funções definidas em $\overline{\Omega}\mathbb{R}^n$ com valores em $\mathbb{R}^N$ em que Ω é um aberto da forma

$$\Omega = \{x = (x_i)_{i=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^n : 0 < x_n < h(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$$

sendo as hipersuperfícies $\{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ e $\{x \in \mathbb{R}^n : x_n = h(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$ não características.

5.4 O Contra-exemplo de Lewy

Durante muito tempo considerou-se que uma equação diferencial parcial "razoável" deveria possuir soluções localmente, com hipóteses ligeiramente mais fracas de regularidade do que a hipótese de analiticidade do teorema de Cauchy-Kowalewska. No entanto o exemplo seguinte, devido a Lewy [18], destruiu totalmente esse preconceito e inaugurou uma área de investigação importante.

Precisaremos de alguns resultados prévios sobre séries que se apresentam como exercícios.

Exercício 5.1. *Considere a série*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k!x)}{(k!)^k}$$

a) Mostre que a série define um função $C^\infty(\mathbb{R})$ periódica.

b) Mostre que essa função não é analítica em 0.

c) Mostre que essa função não é analítica em qualquer ponto de $\mathbb{R}$.

Exemplo. [Lewy] *Considere-se o operador diferencial linear L que actua sobre funções definidas em subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ com valores em $\mathbb{C}$ através de*

$$Lu(x) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} - 2i(x+iy)\frac{\partial u}{\partial t}.$$

e uma função $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. Suponha-se que

$$Lu(x,y,t) = \psi'(t).$$

para (x,y,t) numa vizinhança de $(0,0,t_0)$.

Como primeiro passo deste exemplo vamos mostrar que ψ é necessariamente analítica em t_0 se $u \in C^1$. Defina-se

$$v(r,\theta,t) = e^{i\theta}\sqrt{r}u(\sqrt{r}\cos\theta, \sqrt{r}\operatorname{sen}\theta, t).$$

Então

$$Lu = 2\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} - 2i\frac{\partial v}{\partial t}$$

Defina-se

$$V(t,r) = \int_0^{2\pi} v(r,\theta,t)\, d\theta$$

Tal função V é C^1 num conjunto da forma $\{t+ir \in \mathbb{C} : 0 < r < \delta, |t-t_0| < \delta\}$, $V(t,0) = 0$ e é contínua para $\{t+ir \in \mathbb{C} : 0 \le r < \delta, |t-t_0| < \delta\}$. Usando a periodicidade em θ de v obtém-se facilmente que

$$\frac{\partial V}{\partial t} + i\frac{\partial V}{\partial r} = \pi i \psi'(t)$$

donde se considerarmos $W(t+ir) = V(t,r) - i\pi\psi(t)$ trata-se de uma função holomorfa prolongável por simetria relativamente a $r < 0$ via $W(t-ir) = -\overline{W(t+ir)}$ sendo o prolongamento holomorfo. Em particular a sua parte imaginária é analítica o que em particular significa que ψ é analítica em $t = t_0$.

A conclusão do primeiro passo já seria, por si, interessante, mas se exisgirmos um pouco mais das soluções (terem derivadas holderianas) podemos usá-lo como ponto de partida de um exemplo de uma equação diferencial parcial para o qual não existe solução $C^{1,\alpha}$ num qualquer aberto de $\mathbb{R}^3$. ▲

Capítulo 6

Operadores Elípticos Lineares de 2ª ordem

Este capítulo é uma introdução ao estudo de equações da forma

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f \tag{6.1}$$

em que o operador diferencial linear do primeiro membro, L, é elíptico no sentido da definição 5.1.1 e satisfaz algumas condições adicionais. O nosso principal interesse é mostrar como alguns dos resultados relativos ao Laplaciano podem ser generalizados a esta situação, nomeadamente o *princípio de máximo*, e como usar os resultados obtidos para a equação de Poisson para, por "perturbação", obter resultados de existência, unicidade ou regularidade para problemas de valores na fronteira relativos a (6.1).

Suporemos que L actua sobre funções $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Não faremos hipóteses especiais sobre a regularidade dos coeficientes.

6.1 Hipóteses adicionais

Dado o carácter introdutório deste capítulo consideraremos *a priori* hipóteses adicionais que não serão estritamente necessárias em todos os resultados mas que simplificarão o seu enunciado. Geralmente remeteremos as extensões para exercícios ou para as referências [9].

Assim limitar-nos-emos a considerar *operadores uniformemente elípticos*, isto é, supomos que existe $\lambda > 0$ tal que para todo o $\xi = (\xi_i)_{i=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^n$ e todo o $x \in \Omega$ temos

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2. \tag{6.2}$$

Suporemos limitações uniformes dos coeficientes, isto é, que existe $\Lambda > 0$ tal que para todo os $i, j = 1, \ldots, n$ e $x \in \Omega$ temos

$$|a_{ij}(x)|, |b_i(x)|, |c(x)| \leq \Lambda. \tag{6.3}$$

Também a maior parte dos resultados que temos em mente generalizar, por exemplo o princípio de máximo, são trivialmente falsos se não supusermos

$$c \leq 0 \tag{6.4}$$

devido à possível existência de valores próprios positivos de L como é bem ilustrado por $\frac{d^2}{dx^2}(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} x = 0$.

6.2 O princípio de máximo

Começamos por estabelecer um princípio de máximo forte sob hipóteses ainda não tão apuradas como desejável. Suporemos em todos os resultados que se verificam as hipóteses enumeradas na secção anterior.

Lema 6.2.1. *Suponha-se que L verifica (6.1–6.4) e $Lu > 0$. Então L não pode ter um máximo local positivo num ponto interior de $\overline{\Omega}$.*

Demonstração. Suponha-se que u tem um máximo local positivo em $x_0 \in \Omega$. Então $D^2u(x_0)$ define uma forma quadrática semidefinida negativa. Daí, e da hipótese de elipticidade, decorre que devemos ter $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \leq 0$. Como $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) = 0$ para todo o i obtemos

$$Lu(x_0) \leq c(x_0)u(x_0) \leq 0$$

o que contradiria $Lu > 0$. ■

Proposição 6.2.2 (Princípio de máximo fraco)**.** *Suponha-se que L verifica (6.1–6.4) e $Lu > 0$ num aberto limitado. Então*

$$\max_{x\in\overline{\Omega}}\{u(x)\} \leq \max_{x\in\partial\Omega}\{u^+(x)\}$$

em que u^+ designa a parte positiva[1] *de u.*

Demonstração. Seja $v(x) = e^{\alpha x_1}$ em que $\alpha > 0$ será escolhido posteriormente. Temos

$$Lv(x) = (\alpha^2 a_{11}(x) + \alpha b_1(x) + c(x))e^{\alpha x_1}$$

A condição de elipticidade garante que $a_{11}(x) > \lambda > 0$. Assim, para α suficientemente grande, temos

$$Lv > (\alpha^2\lambda - \alpha\Lambda - \Lambda)e^{\alpha x_1} > 0$$

o que permite escrever, para um qualquer $\epsilon > 0$,

$$L(u + \epsilon v) > 0.$$

A função $u + \epsilon v$ está nas condições do lema pelo que não tem um máximo positivo num ponto interior. Assim sendo

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} u \leq \max_{x\in\overline{\Omega}} u + \epsilon v \leq \max_{x\in\partial\Omega}(u+\epsilon v)^+ \leq \max_{x\in\partial\Omega} u^+ + \epsilon \max_{x\in\partial\Omega} v$$

obtendo-se a conclusão fazendo $\epsilon \downarrow 0$. ■

Lema 6.2.3 (Lema do ponto fronteiro de Hopf)**.** *Suponha-se que $u \in C^1(\overline{\Omega})$, L verifica (6.1–6.4), $Lu > 0$ num aberto, $B \equiv B_R(y) \subset \Omega$, $\overline{B} \cap \partial\Omega = \{x_0\}$ e $u(x_0) > u(x)$ para todo o $x \in B$. Então, se $\nu = \frac{x_0 - y}{|x_0 - y|}$, temos*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$

Demonstração. Sejam $0 < r < R$, $\rho = |x - y|$ e $v(x) = e^{-\alpha\rho^2} - e^{-\alpha R^2}$. Temos para $\alpha > 0$ suficientemente grande

$$\begin{aligned} &Lv = \\ &=[4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)(x_i - y_i)(x_j - y_j) - 2\alpha\sum_{i=1}^n (a_{ii}(x) + b_i(x))(x_i - y_i) + c(x)]e^{-\alpha\rho^2} - \\ &\quad - c(x)e^{-\alpha R^2} > (4\alpha^2\lambda r^2 - 4n^{1/2}\alpha\Lambda R - \Lambda)e^{-\alpha r^2} > 0. \end{aligned}$$

[1] Convencionamos $u^+(x) = \max\{0, u(x)\}$, $u^- = (-u)^+$.

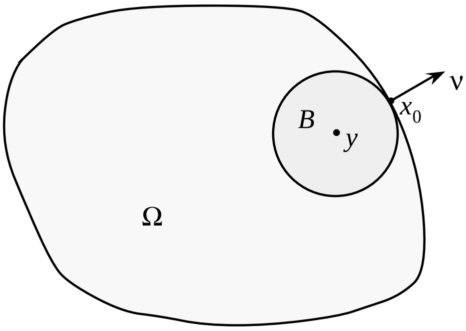

Figura 6.1: O lema do ponto fronteiro de Hopf.

Como sobre $\partial B_r(y)$ temos $u - u(x_0) < 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que $u - u(x_0) + \epsilon v \leq 0$ sobre $\partial B_r(y)$. Como $v \equiv 0$ sobre ∂B também temos $u - u(x_0) + \epsilon v \leq 0$ sobre ∂B. Assim se $A = B \setminus B_r(y)$ podemos aplicar o princípio de máximo fraco em A para obter

$$\max_A (u - u(x_0) + \epsilon v) \leq \max_{\partial A} (u - u(x_0) + \epsilon v)^+ = 0.$$

Isto implica que $\frac{\partial(u - u(x_0) + \epsilon v)}{\partial \nu} > 0$. Como $\frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) < 0$ isto prova o resultado. ■

Teorema 6.2.4 (Princípio de máximo forte)**.** *Suponha-se que L verifica (6.1–6.4), $Lu \geq 0$ num aberto conexo e u tem um máximo positivo num ponto interior. Então u é constante.*

6.3 Uma estimativa pontual

O princípio de máximo vai permitir obter uma estimativa pontual.

Teorema 6.3.1. *Suponha-se que L verifica (6.1–6.4) com Ω um aberto limitado. Então existe $C > 0$ tal que se $Lu \geq f$ vale a estimativa pontual*

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+ + C \sup_{\Omega} \frac{f^-}{\lambda}.$$

Demonstração. Suponha-se que

$$\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_1 < d\}$$

e seja

$$v(x) \equiv \max_{\partial\Omega} u^+ + (e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1}) \sup_{\Omega} \frac{f^-}{\lambda}.$$

Temos

$$Lv(x) = -(\alpha^2 a_{11}(x) + \alpha b_1(x)) e^{\alpha x_1} \sup_{\Omega} \frac{f^-}{\lambda} + c(x)v(x)$$

donde

$$Lv(x) \leq -\left(\alpha^2 \lambda - \alpha\lambda \frac{\Lambda}{\lambda}\right) e^{\alpha x_1} \sup_{\Omega} \frac{f^-}{\lambda} \leq -\left(\alpha^2 - \alpha \frac{\Lambda}{\lambda}\right) \sup_{\Omega} f^-.$$

Se escolhermos α de maneira a $\alpha^2 - \alpha\frac{\Lambda}{\lambda} > 1$ obtemos

$$L(u - v) \geq \sup_{\Omega} (f^- + f) \geq 0.$$

Por outro lado temos sobre $\partial\Omega$

$$u - v = u - u^+ - (e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1}) \sup_{\Omega} \frac{f^-}{\lambda} \leq 0$$

pelo que, do princípio de máximo fraco, obtemos que $u \leq v$ em Ω. ∎

6.4 O método de continuidade

Esta secção destina-se a mostrar como podemos passar de resultados relativos à equação de Poisson para par resultados relativos a uma equação elíptica através de um argumento de perturbação. O resultado básico é enunciado a seguir usando uma formulação abstracta.

Teorema 6.4.1. *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $L_0, L_1 : E \to F$ operadores lineares contínuos. Para $t \in [0,1]$ seja $L_t \equiv (1-t)L_0 + tL_1$. Suponha-se que L_0 é sobrejectivo e que existe $C > 0$ tal que para todo o $x \in E$ e todo o $t \in [0,1]$ temos*

$$C\|L_t x\|_F \geq \|x\|_E. \tag{6.5}$$

Então L_1 é sobrejectivo.

Demonstração. Suponha-se que L_t é sobrejectivo para um certo $t \in [0,1[$ e que queremos provar que L_τ é sobrejectivo para $|t-\tau|$ pequeno. A desigualdade (6.5) garante que qualquer L_t sobrejectivo tem um inverso contínuo L_t^{-1} e que $\|L_t^{-1}\|_{\mathcal{L}(F,E)} \leq C$ independentemente de t. Assim a equação

$$L_\tau x = y$$

é equivalente a

$$x = L_t^{-1}((L_t - L_\tau)x + y)$$

que tem a forma de um problema de ponto fixo $x = T_y(x)$. Temos, para $x_1, x_2 \in E$

$$\begin{aligned}
\|T_y(x_1) - T_y(x_2)\|_E &= \|L_t^{-1}(L_t - L_\tau)(x_1 - x_2)\|_E \\
&\leq C\|L_t - L_\tau\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|x_1 - x_2\|_E \\
&\leq C|t-\tau| \operatorname{máx}\{\|L_0\|_{\mathcal{L}(E,F)}, \|L_1\|_{\mathcal{L}(E,F)}\}\|x_1 - x_2\|_E.
\end{aligned}$$

Assim, usando o teorema do ponto fixo de Banach, existe $c > 0$ tal que se L_t é sobrejectivo L_τ é sobrejectivo se $|t-\tau| < c$. Isto garante que podemos cobrir $[0,1]$ com um número finito de intervalos de comprimento c donde a sobrejectividade de L_0 implica a sobrejectividade de L_1. ∎

A seguir ilustramos como utilizar o resultado anterior para obter resultados para operadores elípticos gerais à custa de resultados relativos à equação de Poisson.

Teorema 6.4.2. *Seja L um operador diferencial verificando (6.1–6.4). Admita-se*[2] *que Ω é tal que todas as soluções $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ de uma equação de Poisson $Lu = f \in C^{0,\alpha}$ com valor 0 sobre $\partial\Omega$ satisfazem uma estimativa*

$$|u|_{2,\alpha} \leq C(|u|_{0,\alpha} + |f|_{0,\alpha}) \tag{6.6}$$

em que a constante C só depende de Ω, λ e Λ.

Seja $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Então, se o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} Lu = f, & \text{em } \Omega \\ u = \varphi & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Demonstração. Seja ∎

[2] Pode provar-se que se a fronteira de Ω fôr suficientemente regular, em particular de classe $C^{2,\alpha}$, podemos prescindir desta hipótese.

Capítulo 7

Métodos Variacionais

7.1 Os Teoremas de Stampacchia e Lax-Milgram

A solução por métodos variacionais de equações elípticas lineares de 2ª ordem baseia-se, no que diz respeito a resultados de existência, em resultados abstractos em espaços de Hilbert que generalizam observações geometricamente intuitivas em $\mathbb{R}^n$. O resultado central deste tipo que iremos usar é o teorema de Stampacchia e o seu corolário o teorema de Lax-Milgram.

No que se segue suporemos que o leitor tem presente a teoria básica sobre espaços de Hilbert. Designaremos por H um espaço de Hilbert sobre os reais em que está definido um produto interno $(\cdot,\cdot)$ cuja norma associada $\|\cdot\|$ torna H um espaço de Banach. O dual topológico de H é designado H', usaremos a notação $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H'\times H}$ para o produto de dualidade e supomos conhecido o importante teorema de representação de Riesz:

Teorema 7.1.1. *Seja H um espaço de Hilbert e um $\phi \in H'$ um funcional linear contínuo. Então existe $z \in H$ único tal que $\langle \phi, x\rangle_{H'\times H} = (z, x)$ para todo o $x \in H$.*

A ideia base de carácter geométrico que usaremos na demonstração do teorema de Stampacchia pode ser motivada pela observação de que se $x \in H$, $K \subset H$ for um convexo não vazio e existir em K um ponto y a distância mínima de x, isto é,

$$\|x - y\| = \inf_{w\in K} \|x - w\| \tag{7.1}$$

então dado um qualquer outro ponto $v \in K$ a função

$$[0,1] \ni t \mapsto \|x - (y + t(v - y))\|$$

tem necessariamente um mínimo para $t = 0$ pois qualquer ponto $x - (y + t(v - y)) \in K$ se $t \in [0,1]$. Se considerarmos então

$$[0,1] \ni t \mapsto \|x - (y + t(v - y))\|^2 = \|x - y\| - 2t(x - y, v - y) + t^2\|v - y\|$$

verificamos que 0 ser mínimo implica

$$(x - y, v - y) \leq 0, \forall_{v\in K}. \tag{7.2}$$

Reciprocamente se se verificar (7.2) então y é o único ponto de K que verifica (7.1).

Nada no argumento anterior garante que existe um ponto de K a distância mínima de x. No entanto se supusermos adicionalmente que K é fechado é possível provar:

Proposição 7.1.2. *Seja H um espaço de Hilbert, $x \in H$ e $K \subset H$ um convexo fechado e não vazio. Então existe um único $y \in K$ a distancia mínima de x, isto é verificando as condições equivalentes (7.1) e (7.2).*

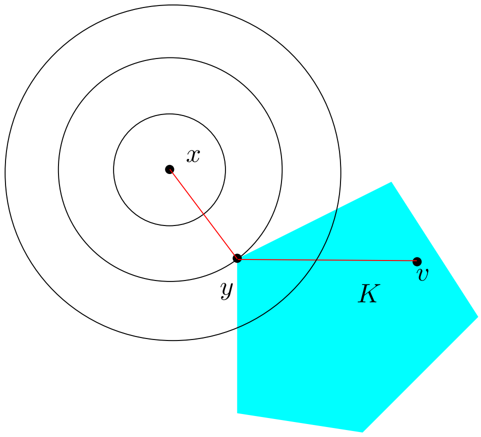

Figura 7.1: Projecção num convexo fechado e não vazio

Demonstração. Considere-se uma sucessão $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ tal que $\|y_k - x\| \to \inf_{y\in K} \|y-x\| \equiv d$. O ponto essencial a estabelecer é que esta sucessão é uma sucessão de Cauchy para podermos usar a completude dos espaços de Hilbert, o facto de K ser fechado e a continuidade da norma para garantir que a sucessão é convergente.

Dados dois termos da sucessão y_j, y_k o ponto médio $\frac{y_j+y_k}{2} \in K$ verificará

$$\left\| \frac{y_j+y_k}{2} - x \right\| \geq d.$$

Aplicando a identidade do paralogramo (de "lados" $x - y_j$ e $x - y_k$) obtém-se

$$2\|x-y_j\|^2 + 2\|x-y_k\|^2 = \left\| 2\left(x - \frac{y_j+y_k}{2}\right)\right\|^2 + \|y_j - y_k\|^2$$

donde

$$\|y_j - y_k\|^2 = 2\|x-y_j\|^2 + 2\|x-y_k\|^2 - \left\| 2\left(x - \frac{y_j+y_k}{2}\right)\right\|^2 \leq 2\|x-y_j\|^2 + 2\|x-y_k\|^2 - 4d^2 \to 0,$$

quando $j,k\to\infty$ pelo que se trata efectivamente de uma sucessão de Cauchy. ∎

Dados x e K como na proposição anterior passaremos a designar o ponto de K a distância mínima de x por $P_K(x)$. A aplicação P_K não é em geral linear mas é contínua, mais precisamente lipschitziana, e a sua constante de Lipschitz é facilmente estimada.

Proposição 7.1.3. *Se K tem as mesmas propriedades da proposição anterior então*

$$\|P_K(x_1) - P_K(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|, \forall_{x_1,x_2\in H}.$$

Demonstração. Sejam $y_i = P_K(x_i)$ para $i = 1,2$ e considere-se (7.2) com $x = x_1, y = y_1, v = y_2$ e com $x = x_2, y = y_2, v = y_1$. Obtemos então

$$\begin{aligned} &(x_1 - y_1, y_2 - y_1) \leq 0, \\ &0 \leq (x_2 - y_2, y_2 - y_1). \end{aligned}$$

pelo que

$$(x_1 - y_1, y_2 - y_1) \leq (x_2 - y_2, y_2 - y_1).$$

e daí

$$((x_1 - x_2) - (y_1 - y_2), y_2 - y_1) \leq 0,$$

ou seja
$$(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \geq \|y_1 - y_2\|^2$$
donde o resultado segue via desigualdade de Cauchy-Schwarz. ■

Uma aplicação $a : H \times H \to \mathbb{R}$ com H um espaço vectorial real diz-se bilinear se para todos os $x, y, z \in H$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tivermos $a(\alpha x, y) = a(x, \alpha y) = \alpha a(x, y)$, $a(x + y, z) = a(x, z) + a(y, z)$ e $a(x, y + z) = a(x, y) + a(x, z)$. Se adicionalmente H for normado a forma bilinear a diz-se *contínua* se existir $C \geq 0$ tal que $|a(x, y)| \leq C\|x\|\|y\|$ para todos os $x, y \in H$ e *coerciva* se existir $c > 0$ tal que $|a(x, x)| \geq c\|x\|^2$ para todo o $x \in H$

Teorema 7.1.4 (Stampacchia)**.** *Seja H um espaço de Hilbert real e $K \subset H$ um subconjunto convexo fechado. Considerem-se em H uma forma bilinear contínua e coerciva $a : H \times H \to \mathbb{R}$ e um funcional linear contínuo $\lambda : H \to \mathbb{R}$. Então existe um e um só $u \in K$ tal que*
$$a(u, v - u) \geq \lambda(v - u), \forall v \in K. \tag{7.3}$$
Adicionalmente se a fôr uma forma simétrica u é uma solução do problema
$$\frac{1}{2}a(u, u) - \lambda(u) = \inf_{v \in K} \frac{1}{2}a(v, v) - \lambda(v). \tag{7.4}$$

Demonstração. Pelo teorema de Riesz existe um $z \in H$ único tal que $\lambda(v) = (z, v)$ para todo o $v \in H$. De forma análoga, como para $u \in H$ fixado a aplicação $H \ni v \mapsto a(u, v)$ é um funcional linear contínuo, existe um elemento único de H dependente de u, que designamos por Au, tal que $a(u, v) = (Au, v)$ para todo o $v \in H$. É fácil de verificar que $A : H \to H$ é um operador linear contínuo e adicionalmente a hipótese de coercividade de a implica que existe $c > 0$ tal que $(Au, u) \geq c\|u\|^2$ para todos $u \in H$. Assim (7.3) pode ser reformulada como
$$(Au, v - u) \geq (z, v - u), \forall_{v \in K}. \tag{7.5}$$
ou de forma equivalente
$$(Au - z, v - u) \geq 0, \forall_{v \in K}.$$
ou ainda, se ρ for um número positivo a escolher posteriormente,
$$(-\rho(Au - z) + u - u, v - u) \leq 0, \forall_{v \in K}.$$
A proposição 7.1.2 permite interpretar este problema na forma
$$u = P_K(u - \rho(Au - z)),$$
isto é, se $S : K \to K$ for definida por $Su = P_K(\rho(Au - z) + u)$ então u é um ponto fixo da aplicação S. Vamos usar o teorema do ponto fixo de Banach para garantir que S possui um ponto fixo único desde que $\rho > 0$ seja escolhido suficientemente pequeno. Para tal temos que estimar $\|Su_1 - Su_2\|$ em termos de $\|u_1 - u_2\|$ para $u_1, u_2 \in K$. Usando a proposição 7.1.3 obtém-se e as propriedades de continuidade e coercividade de A estima-se
$$\begin{aligned}\|Su_1 - Su_2\|^2 &= \|u_1 - \rho(Au_1 - z) - u_2 + \rho(Au_2 - z) - \|^2 = \|u_1 - u_2 - \rho(A(u_1 - u_2))\|^2 \\ &= \|u_1 - u_2\|^2 - 2\rho(u_1 - u_2, A(u_1 - u_2)) + \rho^2\|A(u_1 - u_2)\|^2 \\ &\leq (1 - 2c\rho + \|A\|^2\rho^2)\|u_1 - u_2\|^2\end{aligned}$$
Assim S é uma aplicação de contracção se $\|A\|\rho - 2c < 0$ o que estabelece a existência de uma solução de (7.3).

Para estabelecer (7.4) basta notar que $a(\cdot, \cdot)$ define um produto interno em H que é topologicamente equivalente ao produto interno original graças à hipótese de coercividade e aplicar a proposição 7.1.2. ■

Um corolário quase imediato é o

Teorema 7.1.5 (Lax-Milgram)**.** *Suponha-se que K é um subespaço fechado dum espaço de Hilbert H, a é uma forma bilinear contínua e coerciva em H e λ um funcional linear contínuo em H. Então existe um e um só $u \in K$ tal que*

$$a(u, v) = \lambda(v) \forall_{v \in K}$$

Demonstração. Note-se que sendo K um subespaço de H para todo o $v \in K$ temos $v + u, -v + u \in K$ em que $u \in K$ é a solução obtida por aplicação do teorema de Stampacchia. Daí que na desigualdade variacional podemos substituir v por $v + u$ e $-v + u$ obtendo a igualdade pretendida. ∎

7.2 Introdução aos espaços de Sobolev

7.2.1 Definições e propriedades elementares

7.2.2 Os teoremas de Sobolev e Morrey

7.2.3 O teorema de Rellich

7.2.4 Outros resultados

Proposição 7.2.1. *Sejam $1 < p \leq \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset W^{1,p}(\Omega)$. Se $u_k \to u$ em $L^p(\Omega)$*

Teorema 7.2.2. *$W^{1,\infty}_{loc}(\Omega)$ é o espaço das funções localmente lipschitzianas em Ω.*

Demonstração. Seja f uma função localmente lipschitziana em Ω, $\omega \Subset \Omega$, e $\delta > 0$. Definamos para $x \in \omega_\delta \equiv \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \delta\}$ e $|t| < \delta$

$$g_{i,t}(x) = \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t}$$

Temos $g_{i,t} \in L^\infty(\omega_\delta)$ para todo o t tal que $|t| < \delta$ e além disso todas estas funções satisfazem para uma constante C independente de t

$$\|g_{i,t}\|_{L^\infty(\omega_\delta)} \leq Lip(f, \omega).$$

Então a família de funções $\{g_{i,t}\}_{0<t<\delta}$ está contida numa bola de $L^\infty(\omega_\delta)$ logo podemos afirmar que é relativamente compacta para a topologia fraca-$*$.

Seja agora $\varphi \in C^\infty_c(\omega_\delta)$. Podemos então garantir que existe uma sucessão $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$, com $t_k \to 0$, e uma função $g_i \in L^\infty(\omega_\delta)$ tal que

$$\int_\Omega f(x) \frac{\varphi(x - t_k e_i) - \varphi(x)}{t_k} \, dx = \int_\Omega g_{i,t_k}(x) \varphi(x) \, dx \to \int_\Omega g_i(x) \varphi(x) \, dx$$

Por outro lado o teorema da convergência dominada garante que

$$\int_\Omega f(x) \frac{\varphi(x - t_k e_i) - \varphi(x)}{t_k} \, dx \to -\int_\Omega f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx$$

e portanto g_i é a derivada fraca de f em ordem a x_i relativamente a ω_δ. Como raciocinámos para um qualquer $\omega \Subset \Omega$ podemos estabelecer que efectivamente $f \in W^{1,\infty}_{loc}(\Omega)$.

Reciprocamente suponha-se $f \in W^{1,\infty}_{loc}(\Omega)$. Sem perda de generalidade podemos supor que f tem suporte compacto em Ω. Seja $(\rho_\epsilon)_{\epsilon > 0}$ a usual família de molificadores e considere-se para ϵ suficientemente pequeno $f_\epsilon = \rho_\epsilon * f$. Verifica-se com facilidade que a família de funções regularizadas $(f_\epsilon)_{\epsilon>0}$ converge uniformemente para o representante contínuo de f e que o supremo das derivadas parciais dos f_ϵs pode ser estimado uniformemente. Notando então que

$$\begin{aligned} |f_\epsilon(x) - f_\epsilon(y)| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt}(f_\epsilon(tx + (1-t)y))\, dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 Df_\epsilon(tx + (1-t)y)) \cdot (x-y)\, dt \right| \le C|x-y|. \end{aligned}$$

Passando ao limite quando $\epsilon \to 0$ obtém-se que o representante contínuo de f é efectivamente lipschitziano. ■

7.3 Aplicações a problemas elípticos

Considere-se o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{7.6}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado com fronteira suficientemente regular, e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função suficientemente regular, e procuramos uma solução clássica do problema, mais precisamente, pretendemos estabelecer existência e unicidade de solução para $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

Vamos estudar este problema através do estudo duma versão fraca do mesmo problema em espaços de Sobolev adequados. Para tal considera-se o problema que consiste em determinar $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + u(x)v(x)\, dx = \int_\Omega f(x)v(x)\, dx \qquad \text{para todo o } v \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{7.7}$$

Este problema é natural pois se considerarmos em (7.6) $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e o produto de ambos os membros por $v \in C_c^\infty(\Omega)$, integrarmos por partes e usarmos a densidade de $C_c^\infty(\Omega)$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$ obtemos que u satisfaz (7.7). Reciprocamente se u for uma solução *suficientemente regular* de (7.7) será também uma solução de (7.6). Para atingirmos o nosso objectivo precisaremos de resolver duas questões:

- Reformular em forma abstracta (7.7) de maneira a poder aplicar o teorema de Lax-Milgram.
- Mostrar que as soluções de (7.7) têm regularidade adicional; isto será feito à custa do método do quociente de Nirenberg a descrever abaixo.

Comecemos então por aplicar o teorema de Lax-Milgram. Consideramos a forma $a : W_0^{1,2}(\Omega) \times W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ e o funcional $\lambda : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definidos por

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + u(x)v(x)\, dx, \\ \lambda(v) &= \int_\Omega f(x)v(x)\, dx, \end{aligned}$$

que são obviamente lineares, contínuos ($|a(u,v)| \le \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}\|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}$, $|\lambda(v)| \le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}$)e a é coercivo ($a(u,u) = \|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}$). Portanto existirá em $W^{1,2}(\Omega)$ uma única solução de (7.7).

Resta-nos então mostrar que as soluções de (7.7) possuem regularidade adicional.

7.3.1 O método do quociente de Nirenberg

Capítulo 8

A equação do calor

8.1 O núcleo de Gauss

8.2 Princípio de Máximo

Capítulo 9

A equação das ondas

9.1 O problema de Cauchy

9.2 O método das médias

9.3 O método de descida

Apêndice A

Mecânica dos Meios Contínuos

Neste apêndice de carácter introdutório pretende-se dar uma panorâmica, necessariamente breve e incompleta, dos fundamentos da Mecânica dos Meios Contínuos como fonte essencial de exemplos e problemas no estudo de equações diferenciais parciais.

A.1 Formulação dos modelos

A.1.1 Cinemática

Seja $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$, $(n = 1, 2$ ou $3)$ um aberto. Ω_0 será a configuração de referência de um corpo. A evolução do corpo ao longo do tempo é descrita por uma aplicação $\boldsymbol{x} : I \times \Omega_0 \to \mathbb{R}^n$ onde o intervalo $I \subset \mathbb{R}$ representa o intervalo de tempo que estamos a considerar para o movimento. O corpo ocupará no instante t a configuração $\boldsymbol{x}(t, \Omega_0) \equiv \Omega_t$. Para a notação ser coerente supômos $0 \in I$, $\boldsymbol{x}(0, p) = p$ para todo o $p \in \Omega_0$[1].

Será conveniente impôr alguma regularidade a $\boldsymbol{x}$. Por exemplo a não interpenetração da matéria sugere que as aplicações $\boldsymbol{x}(\cdot, t)$ sejam homeomorfismos para cada $t \in I$. De facto seremos muito mais restritivos supondo que são difeomorfismos de classe C^k com k conveniente. Tal não impedirá que em problemas específicos, tal como o estudo de cavitação, estas hipóteses se mostrem totalmente inadequadas.

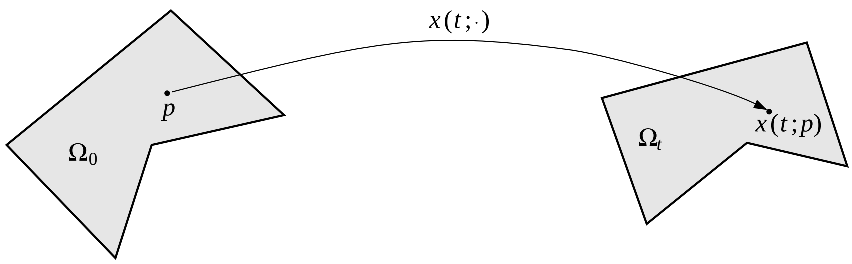

Figura A.1: Cinemática.

As coordenadas p dizem-se *coordenadas materiais* ou *lagrangianas* e as coordenadas $x = \boldsymbol{x}(t, p)$ dizem-se *coordenadas espaciais* ou *eulerianas*. Em particular cada ponto $p \in \Omega$ diz-se uma *partícula* e $\boldsymbol{x}(\cdot, p)$ dir-se-á a sua *trajectória*. Dada uma grandeza $\boldsymbol{g}$ descrita em coordenadas materiais a sua descrição em coordenadas espaciais[2] far-se-á através de

$$g(t, \boldsymbol{x}(t, p)) = \boldsymbol{g}(t, p)$$

[1] Claro que se pode supôr que a configuração de referência é distinta de qualquer configuração do corpo e esse ponto de vista é adoptado por vários autores. No presente contexto não há vantagem especial em fazê-lo.

[2] Usar-se-á $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}, \ldots$ para representações de grandezas em coordenadas materiais e $a, b, c, \ldots, \alpha, \ldots$ para as respectivas representações em coordenadas espaciais.

o que é possível graças a supormos que as aplicações $\boldsymbol{x}(t,\cdot)$ são difeomorfismos.

Definem-se os campos de velocidade e aceleração em coordenadas materiais através de

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(t,p) &= \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}(t,p)\\ \boldsymbol{a}(t,p) &= \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}(t,p).\end{aligned}$$

Claro que

$$\begin{aligned}v(t,\boldsymbol{x}(t,p)) &= \boldsymbol{v}(t,p)\\ a(t,\boldsymbol{x}(t,p)) &= \boldsymbol{a}(t,p).\end{aligned}$$

Note-se que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}(t,p) &= \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}(t,p)\\ &= \frac{\partial v}{\partial t}(t,\boldsymbol{x}(t,p)) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}(t,\boldsymbol{x}(t,p))\frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial t}(t,p)\\ &= \frac{\partial v}{\partial t}(t,\boldsymbol{x}(t,p)) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}(t,\boldsymbol{x}(t,p))\boldsymbol{v}_i(t,p)\end{aligned}$$

em que $v = (v_i)_{1\le i\le n}$, etc.. Em coordenadas espaciais

$$a(t,x) = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} v_i.$$

A.1.2 Massa, Força, Momento Linear e Momento Angular

Consideram-se definidos campos

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\rho} : \mathbb{R}\times\Omega \to [0,\infty[\\ &\boldsymbol{f} : \mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{R}^n\\ &\boldsymbol{\tau} : \mathbb{R}\times\Omega\times S^{n-1} \to \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

correspondendo $\boldsymbol{\rho}$ à densidade de massa, $\boldsymbol{f}$ à densidade de forças em volume e $\boldsymbol{\tau}$ à densidade de forças superficiais. Todos estes campos supõem-se pelo menos C^1 nos seus domínios. Estas grandezas, de acordo com a convenção que foi introduzida implicitamente atrás e que daqui em diante será utilizada sem mais comentários, serão designadas em coordenadas espaciais por ρ, f, τ, designando ρ a densidade, f uma densidade de força em volume e τ uma densidade de força superficial. Note-se que $S^{n-1} = \partial B_1^n(0)$ com $B_1^n(0)$ a bola unitária em $\mathbb{R}^n$. Portanto $\tau(t,x,\nu)$ é interpretado como uma força superficial actuando no ponto x no instante t sobre uma hipersuperfície cuja normal em x é ν.

Juntamos ao modelo as seguintes *leis de conservação*:

- a lei de *conservação de massa*
$$\frac{d}{dt}\int_{\omega_t} \rho\, dx = 0;$$
- a *equação de movimento* ou lei da *conservação do momento linear*
$$\frac{d}{dt}\int_{\omega_t} \rho v\, dx = \int_{\omega_t} \rho f\, dx + \int_{\partial\omega_t} \tau(t,x,\nu)\, dS;$$

- a lei da *conservação do momento angular*

$$\frac{d}{dt}\int_{\omega_t} \rho\, x \wedge v\, dx = \int_{\omega_t} \rho\, x \wedge f\, dx + \int_{\partial\omega_t} x \wedge \tau\, dS$$

em que $\wedge$ designa produto externo, ν é a normal a $\partial\omega_t$ onde aquela estiver definida, sendo $\omega_t = \boldsymbol{x}(t, \omega)$ com $\omega \subset \Omega$ um qualquer aberto com fronteira seccionalmente regular.

Exercício A.1. *Prove que:*

a) as formas local e diferencial da lei da da conservação da massa, i.e., ρ satisfaz

$$\boldsymbol{\rho}(t,p) = \boldsymbol{\rho}_0(p) \det\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^{-1}, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}_x(\rho v) = 0$$

para uma certa densidade $\boldsymbol{\rho}_0$;

b) para toda a função $\boldsymbol{g} \in C^1$, $\boldsymbol{g} : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ temos

$$\frac{d}{dt}\int_{\omega_t} g(t,x)\, dx = \int_{\omega_t} \frac{\partial g}{\partial t} + \operatorname{div}_x(g(t,x)v(t,x))\, dx$$

c) $\tau(t, x, \cdot)$ é a restrição a S^{n-1} duma aplicação linear em $\mathbb{R}^n$.

d) para cada t e cada x a matriz $T(t,x)$ representando $\tau(t,x,\cdot)$ é simétrica.

Exercício A.2. *Provou no problema anterior que*

$$\tau(t, x, \nu) = T(t, x)(\nu)$$

para todo o $\nu \in S^{n-1}$ em que os $T(t,x)(\cdot)$ são aplicações lineares e designam-se por tensor das tensões. Para um fluido perfeito

$$T(t,x) = -p(t,x)\,\mathrm{Id}$$

com p uma função escalar (pressão). Interprete o modelo formulado até ao momento de maneira a obter o familiar princípio de Arquimedes para um fluido perfeito em repouso.

A.1.3 Equações de Navier-Stokes

Let

A.2 Equações de Cauchy-Riemann

Let

A.3 Equações de Euler-Lagrange

A.4 Electromagnetismo

A.5 Equações de Hamilton-Jacobi

A completar.

A.6 Exercícios

s

Apêndice B

Convolução e regularização

B.1 Sucessões de molificadores

O exercício seguinte será o ponto de partida para estabelecer uma ferramenta elementar mas indispensável para o estudo das equações diferenciais parciais.

Exercício B.1. *Construa uma função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, com suporte compacto contido em $[-1, 1]$, verificando $\varphi \geq 0$, $\varphi(x) = \varphi(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $\varphi \equiv 1$ numa vizinhança de 0.*

A classe das funções C^∞ de suporte compacto num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é abreviada por $C_c^\infty(\Omega)$ e tais funções designam-se por funções teste[1]. É óbvio que se definirmos $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ via

$$\rho(x) = \frac{\varphi(|x|)}{c}$$

em que $c > 0$ é tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \rho = 1$ e φ é a função do exercício anterior então $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Defina-se também para $\epsilon > 0$

$$\rho_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} \rho\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

Ora $\rho_\epsilon \, dx$ define uma probabilidade para cada $\epsilon > 0$. Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ cada função $f_\epsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_\epsilon(y) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} f(y - x)\rho_\epsilon(x) \, dx \tag{B.1}$$

é obtida tomando uma média ponderada dos valores de f numa vizinhança do ponto y.

O integral usado em (B.1) é um caso particular dum integral de convolução. Dadas duas funções mensuráveis $h, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ define-se a sua *convolução* (*ou produto de convolução*), $g * h$, via

$$g * h(y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y - x)h(x) \, dx$$

sempre que o integral do segundo membro existir e fôr finito para quase todo o $y \in \mathbb{R}^n$. Em particular tal acontece se $g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sendo nesse caso $g * h \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Exercício B.2. *Verifique que se $g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então*

a) $g * h$ está definida quase por toda a parte em $\mathbb{R}^n$.

b) $\|g * h\|_{L^1} = \|h\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$.

c) $g * h = h * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

[1] A notação $C_0^\infty(\Omega)$ é por vezes utilizada para o mesmo fim. Reservá-la-emos para as funções C^∞ com limite 0 no infinito.

Facilmente se prova que as funções f_ϵ são de classe C^∞. Por esse motivo, a família $(f_\epsilon)_{\epsilon>0}$ definida por (B.1) designa-se por família de regularizadas de f através da família de molificadores $(\rho_\epsilon)_{\epsilon>0}$. Vamos estabelecer alguns resultados que serão do seguinte tipo: $f_\epsilon \to f$ *no sentido do espaço normado a que pertencer* f. De forma precisa temos, por exemplo,

Proposição B.1.1. *Seja* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. *Então* $f_\epsilon \to f$ *em* $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Do critério de Tonelli-Hobson e do teorema de Fubini segue

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f_\epsilon(x)|\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\epsilon(y)(f(x) - f(x-y))\, dy \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\epsilon(y)|f(x) - f(x-y)|\, dx\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\epsilon(y)|f(x) - f(x-y)|\, dy\, dx.\end{aligned}$$

Além disso o integral precedente pode escrever-se como

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x - \epsilon y)|\, dx \right) dy$$

aonde o integral mais interior converge para 0 quando $\epsilon \to 0$ pelo teorema da convergência dominada. Graças à estimativa $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-\epsilon y)|\, dy \leq 2 \int_{\mathbb{R}^n} |f|$ uma segunda aplicação do teorema da convergência dominada permite estabelecer o resultado. ∎

Os resultados análogos para L^p, $1 < p < \infty$, necessitam de um lema preliminar cujo interesse, para além deste contexto, é de salientar. Fazemos notar que uma função $\varphi : S \subset E \to \mathbb{R}$, em que S é convexo e E designa um espaço vectorial real, diz-se *convexa* se para todo o $x, y \in E$ e todo o $t \in [0,1]$ temos $\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)$.

Lema B.1.2 (Desigualdade de Jensen)**.** *Sejam* $\varphi : \,]a, b[\, \to \mathbb{R}$ *uma função convexa,* μ *uma probabilidade num espaço com medida* X*,* $f \in L^1(X, \mu)$ *e* $a < f(x) < b$ *para quase todo o* $x \in X$*. Então*

$$\varphi\left(\int_X f(x)\, d\mu(x) \right) \leq \int_X \varphi(f(x))\, d\mu(x).$$

Exercício B.3. *Demonstre a desigualdade de Jensen.*

Proposição B.1.3. *Seja* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$. *Então* $f_\epsilon \to f$ *em* $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. A desigualdade de Jensen é aplicável com $\mu = \rho_\epsilon\, dx$, $\varphi(\lambda) = \lambda^p$

$$\begin{aligned}\|f - f_\epsilon\|_{L_p}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\epsilon(y)(f(x) - f(x-y))\, dy \right|^p dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\epsilon(y)|f(x) - f(x-y)|^p\, dy \right| dx\end{aligned}$$

e podemos prosseguir como na Proposição B.1.1. ∎

Note-se que para $p = \infty$ o resultado anterior é falso. No entanto temos

Proposição B.1.4. *Seja* $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$. *Então* $f_\epsilon \to f$ *uniformemente em cada compacto de* $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Seja K um compacto de $\mathbb{R}^n$, e $x \in K$. Temos

$$|f_\epsilon(x) - f(x)| = \left| \int_{B_\epsilon(0)} (f(x-y) - f(x))\rho_\epsilon(y)\, dy \right| \leq \sup_{y \in B_\epsilon(0)} |f(x-y) - f(x)|.$$

O resultado segue da continuidade uniforme de f numa vizinhança fechada de ordem $\epsilon_0 > \epsilon$ de K, isto é, em $K_{\epsilon_0} \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{dist}(x, K) \leq \epsilon_0\}$. ∎

Outra aplicação das mesmas ideias consiste no estabelecimento da existência de *funções de corte*. Por exemplo

Proposição B.1.5. *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ e χ_E a respectiva função característica. Dado $\epsilon > 0$ existe uma função $\eta \equiv \eta_{E,\epsilon}$ que é identicamente 1 em E, 0 no complementar da vizinhança de ordem ϵ de E, isto é $\eta(x) = 0$ se $\operatorname{dist}(x, E) > \epsilon$, e $0 \leq \eta \leq 1$ em $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Seja $E_{\epsilon/2}$ a vizinhança de ordem $\epsilon/2$ de E, isto é,

$$E_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, E) < \epsilon/2\}.$$

Como $E_{\epsilon/2}$ é aberto a respectiva função característica, $\chi_{E_{\epsilon/2}}$, é localmente somável e pode considerar-se, para $0 < \delta < \epsilon/2$, a convolução $\rho_\delta * \chi_{E_{\epsilon/2}}$. ∎

Dos resultados anteriores segue com relativa facilidade o teorema de existência das *partições da unidade*. As partições da unidade constituem uma ferramenta indispensável para a extensão de resultados locais a resultados globais.

Teorema B.1.6 (Partições da unidade)**.** *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{O} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma cobertura aberta de S. Existe uma família contável de funções reais definidas em $\mathbb{R}^n$ com valores em $[0, 1]$, $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, tais que*

i) para cada $j \in \mathbb{N}$ temos $\varphi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$;

ii) para cada $x \in S$ temos $\sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x) = 1$;

iii) para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $\alpha_j \in A$ tal que $\operatorname{supp} \varphi_j \subset U_\alpha$;

iv) para cada $x \in S$ existe uma vizinhança de x, V_x, que só intersecta um número finito de suportes de funções φ_j.

Tal família de funções designa-se por uma partição da unidade localmente finita[2] *subordinada à cobertura $\mathcal{O}$ de S.*

Demonstração. Começamos por observar que se η é uma função de corte relativa a S e $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é uma partição da unidade subordinada a uma cobertura aberta de S então $\{\eta\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ continua a ser uma partição da unidade subordinada à mesma cobertura. Outra observação elementar consiste em verificar que se $S' \supset S$ e $\mathcal{O}$ é uma cobertura aberta de S' então uma partição da unidade relativa a S' e subordinada a uma cobertura aberta $\mathcal{O}$ é também uma partição da unidade relativa a S e subordinada a $\mathcal{O}$. Da segunda observação segue que podemos supor sem perda de generalidade que $S = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ e consequentemente que S é um aberto.

Suponhamos assim que S é um aberto e que o resultado se encontra demonstrado no caso em que S é um compacto. Note-se que para compactos podemos supôr que a partição da unidade está subordinada a uma subcobertura finita. Escrevemos S como uma união numerável de compactos[3], isto é, $S = \cup_{i=1}^{+\infty} K_i$ em que cada K_i é compacto e está contido no interior de K_{i+1}, K_{i+1}^0. Convencionamos $K_0 = K_{-1} = \emptyset$. Para cada $i \in \mathbb{N}$ seja η_i uma função de corte relativa a $K_i \setminus K_{i-1}^0$ tal que $\operatorname{supp} \eta_i \subset K_{i+1} \setminus K_{i-2}$. Seja $\{\varphi_{ij}\}_j$ uma partição da unidade subordinada a uma subcobertura finita de $K_{i+1} \setminus K_{i-1}^0$ por $\mathcal{O}$. Definimos

$$\psi_{ij}(x) = \begin{cases} \frac{\eta_i(x)\varphi_{ij}(x)}{\sum_{ij} \eta_i(x)\varphi_{ij}(x)} & \text{se } \varphi_{ij}(x) \neq 0 \\ 0 & \text{se } \varphi_{ij}(x) = 0 \end{cases}$$

notando que a construção efectuada garante que a soma no denominador é finita e positiva para cada $x \in S$. A família $\{\psi_{ij}\}_{ij}$ é a partição da unidade desejada.

[2] A expressão *localmente finita* refere-se à propriedade *iv.*

[3] Uma fórmula explícita para tais conjuntos K_i é $K_i = \{x \in S : |x| \leq i, \operatorname{dist}(x, \partial S) \geq 1/i\}$.

Resta demonstrar o teorema para o caso em que S é compacto. Como já observámos podemos supôr estar a lidar com uma cobertura finita. A ideia da demonstração neste caso baseia-se na construção de uma outra cobertura de $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ tal que para cada α temos $V_\alpha \Subset U_\alpha$. Para demonstrar que tal é possível suponha-se que escrevemos a cobertura original na forma

$$\{U_{\overline{\alpha}}\} \cup \{U_\alpha : \alpha \in A, \alpha \neq \overline{\alpha}\}$$

Se $\{U_\alpha : \alpha \in A, \alpha \neq \overline{\alpha}\}$ ainda fôr uma cobertura de S definimos $V_{\overline{\alpha}} = \emptyset$. Caso contrário notamos que $\mathrm{dist}(\partial U_{\overline{\alpha}}, S \setminus \cup_{\alpha\in A,\alpha\neq\overline{\alpha}} U_\alpha) > 0$ pelo que podemos tomar $V_{\overline{\alpha}}$ como sendo uma vizinhança conveniente de $S \setminus \cup_{\alpha\in A,\alpha\neq\overline{\alpha}} U_\alpha$. Continuando este argumento indutivamente, e notando que estamos a lidar com uma subcobertura finita, verificamos que efectivamente podemos construir uma tal cobertura $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Definimos então funções de corte ϕ_α relativas a V_α e com $\operatorname{supp}\phi_\alpha \subset U_\alpha$. A partição da unidade desejada será $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ em que

$$\psi_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{\phi_\alpha(x)}{\sum_{\beta\in A}\phi_\beta(x)} & \text{se } \phi_\alpha(x) \neq 0, \\ 0 & \text{se } \phi_\alpha(x) = 0. \end{cases}$$

■

Apêndice C

Problemas Adicionais

Exercício C.1. Considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (x^2+1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x + t^2, \\ u(x,0) = x+1, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x^2 - 1. \end{cases}$$

a) Justifique que existe uma vizinhança da origem tal que a solução u do problema existe e é única nessa vizinhança.

b) Determine um polinómio de segundo grau p em x e t tal que $u - p = o(x^2 + t^2)$.

Exercício C.2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, e K um conjunto aberto convexo tal que $\overline{K} \subset \Omega$. Convenciona-se que $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ designa a base ortonormal usual de $\mathbb{R}^n$.

a) Justifique que se existe i tal que para todo o h verificando $|h| \leq \rho$ temos

$$\int_\Omega (u(x + he_i) - u(x))\varphi(x)\, dx = 0$$

para todo o $\varphi \in C_c^\infty(K)$ então u é só função de $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ em quase todo o K.

b) Mostre que a conclusão anterior é verdadeira se para todo o $\varphi \in C_c^\infty(K)$ temos

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = 0.$$

c) Suponha agora que $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ é tal que a aplicação

$$C_c^\infty(K) \ni \varphi \mapsto \int_\Omega vD\varphi\, dx \in \mathbb{R}$$

tem como contradomínio um subespaço de dimensão k de $\mathbb{R}^n$. Generalize o resultado de (b) a esta situação.

d) Como deverá adaptar o resultado de (c) ao caso em que K não é necessariamente convexo?

Exercício C.3. *Seja Ω, um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x) \geq 0$ para todo o $x \in \Omega$, e $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tal que $\Delta u = f$ em Ω.*

a) Prove que se $M = \max_{x \in \partial\Omega}\{u(x)\}$ então $u \leq M$ em $\overline{\Omega}$. [**Sugestão:** Comece por considerar $f > 0$. Para o caso geral considere $v_\epsilon(x) = u(x) + \epsilon|x|^2$.]

b) Prove que a solução de

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

se existir é única em $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

Exercício C.4 (Equação bi-harmónica)**.** Considere o problema

$$\begin{cases} \Delta\Delta u = f, & \text{em } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

em que Ω é limitado e tem fronteira regular (no sentido de aplicabilidade do teorema de Gauss).

a) Demonstre a relação

$$\int_\Omega (\Delta u)^2 \, dx = \int_\Omega uf \, dx$$

válida para $u \in C^4(\overline{\Omega})$.

b) Prove a unicidade de solução do problema em $C^4(\overline{\Omega})$.

c) Formule o que significa $\Lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\Lambda \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, ser uma solução fundamental da equação bi-harmónica.

d) Determine uma solução fundamental[1] da equação bi-harmónica quando $n = 2$.

Exercício C.5. Considere a equação diferencial parcial linear de quarta ordem

$$Lu \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_1^2 \Delta\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_2^2 \Delta\right) u(x,t) = 0 \tag{C.1}$$

em que c_1, c_2 são constantes não nulas e $u : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Esta equação é conhecida por *equação das ondas elásticas.*

Define-se

$$M(u)(x,r,t) = \frac{1}{\omega_2 r^2} \int_{\partial B_r(x)} u(y,t) \, dS(y).$$

a) Verifique que para u suficientemente regular $M(u)(x,\cdot,\cdot)$ satisfaz a equação diferencial parcial

$$Lu \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_1^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_2^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) rM(u)(x,r,t) = 0.$$

b) Use (a) para resolver o problema de valores iniciais geral clássico para a equação (C.1).

Exercício C.6 (Equação de Burger)**.** Considere que $v : \mathbb{R} \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ é uma solução positiva e regular da equação diferencial parcial

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

para $t > 0$, sendo μ um parâmetro positivo.

[1] Recorda-se que se $n = 2$ uma solução fundamental da equação de Laplace é dada por

$$\Gamma(x) = \frac{1}{2\Pi} \log |x|.$$

a) Verifique que w definida por $w \equiv -\frac{2\mu}{v}\frac{\partial v}{\partial x}$ é uma solução da *equação de Burger*

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{C.2}$$

b) Mostre que, ao contrário do que aconteceria se $\mu = 0$, existem funções não nulas $\varphi \in C_c^2(\mathbb{R})$ tais que existe uma solução regular de (C.2) satisfazendo $w(x, 0) = \varphi(x)$ e tal que

$$\lim_{t\to\infty} w(x, t) = 0.$$

Exercício C.7. Seja S um semi-espaço em $\mathbb{R}^2$ e u uma função harmónica em $C^0(\overline{S})$. Prove que se u é limitada então

$$\sup_S u \le \sup_{\partial S} u.$$

Exercício C.8. Dada uma função $w : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ "suficientemente regular", e com suporte contido em $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty[$, considere o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = w(x,t), & \text{para } t \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x,0) = 0, & \text{para } x \in \mathbb{R}^n, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & \text{para } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{C.3}$$

a) Verifique que a solução u do problema (C.3) é dada por

$$u(x,t) = \int_0^t v(x, t-s; s)\, ds \tag{C.4}$$

em que $v(\cdot, \cdot; s)$ com $s \in \mathbb{R}$ é a solução de

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v = 0, & \text{para } t \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \mathbb{R}^n, \\ v(x,0;s) = 0, & \text{para } x \in \mathbb{R}^n, \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x,0;s) = w(x,s), & \text{para } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

b) Determine para cada (x_0, t_0) a menor região de $\mathbb{R}^{n+1}$ em que w influencia o valor de $u(x_0, t_0)$.

c) No caso da dimensão espacial ser $n = 1$, explicite o segundo membro de (C.4) em termos de w e dê-lhe a forma $w * E$ com E uma certa função em $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ e $*$ a convolução em $\mathbb{R}^2$.

d) Use (c) para "adivinhar" uma solução fundamental da equação das ondas quando $n = 1$ e verifique que o seu palpite está correcto.

Exercício C.9 (Equações de primeira ordem)**.** Considere a equação diferencial parcial real de primeira ordem

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial y} = 1 \tag{C.5}$$

em que $u = u(x, y)$. Determine para que valores de k a condição inicial $u(x, x) = k$ implica a existência e unicidade de solução de (C.5) em $C^1(U)$ com U uma vizinhança da recta $x = y$. Determine u nesses casos. Comente o que se passa para o(s) outro(s) valores de k.

Exercício C.10 (Soluções fundamentais)**.** a) Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$, com $n \ge 3$, e tal que $f(h) = O(|h|^{2-n})$, $Df(h) = O(|h|^{1-n})$, quando $h \to 0$. Justifique que para toda a função $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx.$$

b) Diga o que significa uma função $g \in L^1_{loc}$ ser uma solução fundamental[2] do operador div.

c) A partir duma solução fundamental do laplaciano, Δ, determine uma solução fundamental do operador div.

Exercício C.11. Sejam $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear invertível, e L um operador diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes. Designe por L_T o operador L após a mudança de coordenadas $y = Tx$. Relacione as soluções fundamentais de L e L_T. [Admita se desejar que as soluções fundamentais de T estão em L^1_{loc}.]

Exercício C.12 (Um princípio de reflexão)**.** Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, um conjunto aberto. Convenciona-se escrever, para todo o $a \in \mathbb{R}^n$, $a = (\hat{a}, a_n)$ com $\hat{a} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $a_n \in \mathbb{R}$. Supõe-se que Ω é tal que se $(\hat{x}, x_n) \in \Omega$ então $(\hat{x}, -x_n) \in \Omega$ e que existe $(\hat{x}, 0) \in \Omega$. Define-se $\Omega^+ = \{(\hat{x}, x_n) \in \Omega : x_n > 0\}$. Supõe-se que $u \in C^1(\overline{\Omega^+}) \cap C^2(\Omega^+)$ verifica

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{em } \Omega^+, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{sobre } \partial\Omega^+ \setminus \partial\Omega, \end{cases}$$

em que ν é a normal exterior a $\partial\Omega^+ \setminus \partial\Omega$, isto é, $\nu = e_n$.

a) Verifique que $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ definida por

$$v(\hat{x}, x_n) = \begin{cases} u(\hat{x}, x_n), & \text{se } x_n \geq 0, \\ u(\hat{x}, -x_n), & \text{se } x_n \leq 0, \end{cases}$$

é harmónica com a possível excepção dos pontos de Ω sobre o hiperplano $x_n = 0$.

b) Seja $(\hat{x}^0, 0) \in \partial\Omega^+ \setminus \partial\Omega$, e B uma bola centrada em $(\hat{x}^0, 0)$ e contida em Ω. Exprima, em termos do núcleo de Poisson[3] e dos valores de v sobre ∂B, a solução do problema

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & \text{em } B \\ w = v, & \text{sobre } \partial B \end{cases}$$

c) Mostre que $w(\hat{x}, x_n) = w(\hat{x}, -x_n)$ para todo o $(\hat{x}, x_n) \in B$.

d) Seja $z^+ = w - v$ definida em $\overline{\Omega^+} \cap B$. Mostre que se $z^+ \neq 0$ então existe $(\hat{x}^1, 0) \in B$ tal que

$$\frac{\partial z^+}{\partial x_n}(\hat{x}^1, 0) \neq 0.$$

e) Justifique que (d) contradiz (c) e consequentemente $w = v$ em B e portanto v é harmónica em Ω.

Exercício C.13 (Unicidade em problemas eliptícos)**.** Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e L um operador diferencial de segunda ordem actuando em funções de $C^2(\Omega)$ através de

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

em que os coeficientes a_{ij} são uniformemente limitados em Ω e satisfazem para um certo $\lambda > 0$

$$\sum_{i,j=1} a_{ij}(x)\eta_i\eta_j \geq \lambda|\eta|^2$$

para todo o $\eta \in \mathbb{R}^n$ e todo o $x \in \Omega$.

[2] Se $n \geq 3$ uma solução fundamental para o Laplaciano, Δ, é dada por $\Gamma(x) = \frac{1}{\omega_n(2-n)}|x|^{2-n}$.

[3] O núcleo de Poisson é dado por $K(x, y) = \frac{1-|x|^2}{\omega_n|x-y|^n}$ no caso da bola unitária $B_1(0)$.

a) Suponha Ω conexo. Seja $\partial\Omega = S_1 \cup S_2$ com S_1 não vazio e suponha-se que para cada ponto de S_2 existe uma bola contida em Ω e tangente a $\partial\Omega$ nesse ponto. Suponha-se que $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup S_2) \cap C^0(\overline{\Omega})$ satisfaz

$$\begin{cases} Lu = 0, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } S_1, \\ \sum \beta_i D_i u = 0, & \text{em } S_2, \end{cases}$$

em que o vector $\beta(x) = (\beta_i)_{i=1,\ldots,n}$ tem uma componente normal relativamente a $\partial\Omega$ não nula em cada ponto de S_2. Mostre que $u = 0$.

b) Suponha-se que para cada ponto de $\partial\Omega$ existe uma bola contida em Ω e tangente a $\partial\Omega$ nesse ponto. Suponha-se que $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ satisfaz

$$\begin{cases} Lu = 0, & \text{em } \Omega, \\ \alpha(x)u + \sum \beta_i D_i u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que o vector $\beta(x) = (\beta_i)_{i=1,\ldots,n}$ e o campo escalar α satisfazem $\alpha(\beta \cdot \nu) > 0$ com ν a normal exterior a $\partial\Omega$. Mostre que $u = 0$.

Exercício C.14 (Funções harmónicas)**.** Considere o problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{em } \Omega, \\ u = \varphi, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ está definido por

$$\begin{aligned} \Omega \ = \ & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 > 1, (x+1)^2 + (y+1)^2 > 1, \\ & (x-1)^2 + (y+1)^2 > 1, (x+1)^2 + (y-1)^2 > 1, |x| < 1, |y| < 1\} \end{aligned}$$

e φ é uma função contínua em $\partial\Omega$.

a) Decida se pode garantir a existência de solução deste problema. Justifique.

b) Estime, tão bem quanto puder, um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tal que possa garantir $u(0,0) \in I$. Justifique.

c) Prove que

$$\begin{aligned} u(x,y) \ &= \ u(-y,x) = u(-x,y) = u(-x,-y) = u(-x,y) = \\ &= \ u(y,x) = u(x,-y) = u(-y,-x) \end{aligned}$$

para todo o $(x,y) \in \Omega$.

d) Proponha uma generalização do resultado anterior para funções harmónicas num aberto de $\mathbb{R}^n$ verificando certas propriedades de simetria com valores na fronteira invariantes relativamente a essa simetria.

e) Prove as afirmações sobre invariância de Δ que eventualmente usou em (c) e (d).

Exercício C.15. Considere o problema de valore iniciais para a *equação de Schrödinger linear* para funções $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

$$i\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \qquad u(0,x) = u_0(x).$$

Obtenha as estimativas

a)
$$\|u(\cdot,t)\|_2 = \|u_0\|_2.$$

b)
$$\|u(\cdot,t)\|_\infty \leq (4\pi t)^{-n/2}\|u_0\|_1.$$

Exercício C.16 (Desigualdade de Harnack)**.** Considere uma função $g : \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ harmónica positiva. Mostre que

$$\frac{1-|x|}{(1+|x|)^{n-1}}g(0) \leq g(x) \leq \frac{1+|x|}{(1-|x|)^{n-1}}g(0)$$

para todo o $x \in B_1(0)$.

Exercício C.17 (Princípios de máximo)**.** Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Considere uma função contínua $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que:

Para todo o $x_0 \in \Omega$ existe $r = r(x_0) < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ tal que

$$v(x_0) = \frac{\int_{\partial B_r(x_0)} v(x)dS(x)}{\int_{\partial B_r(x_0)} dS(x)}. \tag{C.6}$$

Suponha que em Ω existe sempre solução do problema de Dirichlet para a equação de Laplace com valores na fronteira contínuos.

a) Prove que v satisfaz o princípio de máximo fraco.

b) Prove que v é harmónica.

c) Mostre que todas as funções contínuas no fecho dum aberto limitado de $\mathbb{R}^2$, com fronteira localmente lipschitziana, que verifiquem a condição (C.6) são harmónicas.

Exercício C.18 (Métodos de energia)**.** Considere a equação de Hopf

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

e a equação de Burger

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

em que $\epsilon > 0$.

a) Mostre que uma solução regular u da equação de Hopf com suporte limitado na direcção x verifica
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}} u^2(t,x)\,dx = 0.$$

b) Mostre que uma solução regular u da equação de Burger de decrescimento rápido na direcção x verifica
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}} u^2(t,x)\,dx = -\epsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \leq 0.$$

Exercício C.19 (Equação do calor, método da energia e unicidade)**.** Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um domínio regular, $T > 0$ e considere o problema que consiste em determinar $v \in C^2(]0,T[\times U) \cap C^0(]0,T] \times \overline{U})$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = f & \text{em }]0,T[\times U, \\ v(T,x) = \varphi(x) & \text{para } x \in U, \\ v(t,x) = g(t,x) & \text{para } (t,x) \in [0,T] \times \partial U. \end{cases}$$

Pretende-se estabelecer unicidade de solução para este problema.

Seja w a diferença entre duas soluções deste problema e considere $E(t) = \int_U w^2(t,x)\,dx$.

a) Mostre que w satisfaz

$$\frac{dE}{dt} = -2\int_U |\nabla w|^2\, dx \le 0.$$

b) Mostre que basta demonstrar o resultado supondo $E(T) = 0$ e $E(t) > 0$ para $0 \le t \le T$.

c) Mostre que w satisfaz

$$\frac{d^2E}{dt^2} = 4\int_U (\Delta w)^2\, dx \ge 0.$$

d) Mostre que E satisfaz a desigualdade diferencial $(\frac{dE}{dt})^2 \le E(t)\frac{d^2E}{dt^2}$.

e) Mostre que $F(t) \equiv \log E(t)$ é uma função convexa.

f) Conclua que w é identicamente nula.

Bibliografia

[1] V. I. Arnold. *Chapitres Supplémentaires de la Théorie des Équations Différentielles Ordinaires*, capítulo Équations aux dérivées partielles du premier ordre. Mir, Moscow, 1985. 2.4

[2] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle.* Mathématiques Appliquées pour la maîtrise. Masson, Paris, 1983.

[3] R. Courant e D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics*, volume II. Interscience, New York, 1964. 4, 2.4

[4] Robert Dautray, Jacques-Louis Lions, Marc Authier, Philippe Bénilan, e Michel Cessenat. *L'opérateur de Laplace*, volume 2 de *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques.* Masson, Paris, 1987.

[5] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations.* Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.

[6] G. Folland. *Introduction to Partial Differential Equations*, volume 17 de *Mathematical Notes.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1976.

[7] K. O. Friedrichs. *Special Topics in Fluid Dynamics.* Gordon and Breach, 1966.

[8] P. R. Garabedian. *Partial Differential Equations.* Wiley, New York, 1964. 4

[9] D. Gilbarg e N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, volume 224 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983. 6.1

[10] S. Goldstein. Lectures on fluid dynamics. Seminar in Applied Mathematics, Boulder, Colorado, 1957.

[11] M. E. Gurtin. *An Introduction to Continuum Mechanics.* Academic Press, New York, 1981.

[12] M. E. Gurtin. *Topics in Finite Elasticity.* CBMS Series in Applied Mathematics. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1981.

[13] E. Hopf. Elementare bemerkungen über die lösungen partieller differentialgleichungen zweiter ordnung vom elliptischen typus. *Sitber. preuss. Akad. Wiss. Berlin*, 19:147–152, 1927.

[14] L. Hörmander. *Linear Differential Operators.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo.

[15] F. John. *Partial Differential Equations*, volume 1 de *Applied Mathematical Sciences.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, quartaª edição, 1971. 4, 2.4, 2.5

[16] S. Kesavan. *Topics in Functional Analysis and Applications.* Wiley Eastern, New Delhi, 1989.

[17] H. Lamb. *Hydrodynamics.* Cambridge, 1932.

[18] H. Lewy. An example of a smooth linear partial differential equation without solution. *Ann. of Math.*, 66:155–158, 1957. 5.4

[19] L. G. Loitsyanskii. *Mechanics of Liquids and Gases.* Pergamon Press, 1966.

[20] R. Meyer. *Introduction to Mathematical Fluid Dynamics.* Wiley, New York, 1971.

[21] Louis Nirenberg. On elliptic partial differential equations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 13:115–162, 1959.

[22] Petrovsky. *Lectures on Partial Differential Equations.* Interscience, New York.

[23] L. Schwartz. *Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques.*

[24] J. Serrin. *Mathematical Principles of Classical Fluid Dynamics*, volume VIII/1 de *Handbuch der Physik.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1960.

[25] James Serrin. A symmetry problem in potential theory. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 43, 1971. 3.7

[26] Smoller. *Reaction-Diffusion Equations.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo.

[27] Sobolev. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics.* Pergamon Press, Oxford, 1962.

[28] M. Spivak. *Calculus on Manifolds.* Benjamin, New York.

[29] M. Spivak. *Cálculo en Variedades.* Benjamin, New York, 1975.

[30] F. Trèves. *Basic Linear Partial Differential Equations.* Academic Press. 5

[31] C. A. Truesdell e R. A. Toupin. *The Classical Field Theories*, volume III/l de *Handbuch der Physik.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1960.

[32] C. C. Wang. *Mathematical Principles of Mechanics and Electromagnetism.* Plenum, 1979.

[33] H. F. Weinberger. *Introduction to Partial Differential Equations.* Blaisdell. 3.7

[34] Hans F. Weinberger. Remark on the preceding paper of Serrin. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 43, 1971.

[35] Hans F. Weinberger e M. H. Protter. *Maximum Principles in Differential Equations.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984.

Lista de Figuras

Índice remissivo