Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste de Recuperação 1 - 12 de Janeiro de 2009 - 11h
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

(3 val.) 1. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy}-1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Diga, justificadamente, se f é contínua na origem.
Sugestão: Relembre que $\lim_{u\to 0} \frac{e^u-1}{u} = 1$.

2. Considere a função $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x,y,z) = \sin(x+y) + \ln(xz + e^y)$.

(1,5 val.) a) Calcule DF.

(2 val.) b) Mostre que, numa vizinhança de $(\frac{\pi}{2}, 0, 0)$, a equação $F(x,y,z) = 1$ define o gráfico de uma função $f : D \to \mathbb{R}$, em que $D \subset \mathbb{R}^2$.

(1,5 val.) c) Calcule $Df(\frac{\pi}{2}, 0)$.

(1 val.) d) Calcule a derivada de f segundo o vector $(1,1)$, no ponto $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

3. Considere o conjunto $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z + y = 1, \ z^2 + 1 = x^2 + y^2\}$.

(2 val.) a) Mostre que o conjunto M é uma variedade e determine a sua dimensão.

(3 val.) b) Determine o espaço tangente a M no ponto $(0,1,0)$.

(3 val.) 4. Mostre que a função $f(x,y) = x + y$ tem extremos absolutos no conjunto definido por $2x^2 + y^2 = 2$ e determine-os.

(3 val.) 5. Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x,y) = g(x^2 - y^2, 2xy)$ onde $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 que satisfaz $\nabla g \neq 0$ em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$. Mostre que o único ponto crítico de h é $(0,0)$ e classifique-o.