

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II  
TODOS OS CURSOS  
TESTE RECUPERAÇÃO 2 – 12 DE JANEIRO DE 2009 – DURAÇÃO: 90 MINUTOS

**Apresente e justifique todos os cálculos**

(1) Considere a região  $V \subset \mathbb{R}^3$  definida por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq z \leq 2y^2\}.$$

(3 val.)

a) Seja  $\phi(x, y, z) = x$ . Calcule  $\int_V \phi$ .

(3 val.)

b) Escreva uma expressão para o volume de  $V$  da forma  $\int_{\dots} (\int_{\dots} (\int_{\dots} dx) dy) dz$ .

(2) Seja

$$h(x, y, z) = \left( y^2, \frac{y}{y^2 + z^2} + 2xy, \frac{z}{y^2 + z^2} \right).$$

(3 val.)

Calcule o trabalho de  $h$  ao longo da espiral  $\gamma(t) = (e^t, 2 \cos t, 2 \sin t), t \in [0, 4\pi]$ .

(3) Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < y < 2, y = 2\sqrt{x^2 + z^2}\},$$

orientada com a normal unitária  $n$  com segunda componente negativa.

(2.5 val.)

a) Calcule a carga eléctrica total de  $S$ , sabendo que a densidade de carga é dada por  $\sigma(x, y, z) = 3y$ .

(3 val.)

b) Calcule o fluxo do campo  $f(x, y, z) = (\cos(y^2) + 2x, 3y, e^{y^2} - 5z)$  através de  $S$  no sentido de  $n$ .

(2.5 val.)

c) Usando o teorema de Stokes, calcule o trabalho do campo  $h(x, y, z) = (z, 0, 0)$  ao longo de  $\partial S$  percorrido segundo a orientação induzida por  $n$ .

(3 val.)

(4) Mostre que para qualquer campo vectorial de classe  $C^1$  fechado,  $f$ , definido em  $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0), (2, 0)\}$ , existem constantes  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $f = aF + bG + K$ , onde

$$F(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right), \quad G(x, y) = \left( \frac{-y}{(x-2)^2 + y^2}, \frac{x-2}{(x-2)^2 + y^2} \right),$$

e  $K$  é um campo gradiente.