Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Mestrado em Matemática Aplicada

Grupos de Lie e Algebras de Lie

2001/2002 – 2º Semestre

Séries de Exercícios para Resolver em Casa

2ª Série – A entregar até dia 11/04/2002 (na aula)

1. Construa um revestimento $SU(2) \xrightarrow{2:1} SO(3,\mathbb{R})$ (com indicação explícita da matriz ortogonal que é imagem de cada matriz unitária). Mostre que a aplicação está bem definida e que é homomorfismo. Determine o seu núcleo.

2. (a) Seja $(A,\cdot)$ uma álgebra. Mostre que $\mathrm{Der}(A)$ é subalgebra de Lie de $gl(A) = (\mathrm{End}(A), [,])$.

(b) Seja $\mathcal{G}$ uma algebra de Lie. Mostre que para $a \in \mathcal{G}$, o endomorfismo de $\mathcal{G}$, $D_a \in gl(\mathcal{G})$,

$$D_a(b) = ad_a(b) = [a,b] \ ,\forall b \in \mathcal{G}$$

é derivação de $\mathcal{G}$. Mostre que a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \longrightarrow & Der(\mathcal{G}) \\ a & \mapsto & ad_a = [a,\cdot] \end{array}$$

é homomorfismo de algebras de Lie. Qual é o núcleo desse homomorfismo?

3. Seja G grupo de Lie e $\mathcal{G}$ a sua algebra de Lie. Mostre que um campo vectorial $X \in \mathcal{X}(G)$ é invariante á esquerda, $X \in \widetilde{\mathcal{G}}$, se e só se tiver lugar

$$L_g^* \circ X = X \circ L_g^* \ , \ \forall g \in G \ .$$

4. Seja G um grupo de Lie e $\{X_i\}$, $\{\omega^i\}$ bases duais de $\widetilde{\mathcal{G}}$ e de $\widetilde{\mathcal{G}}^* = (D^1(G))^{L_G}$, com

$$[X_i, X_j] = \sum_k C_{ij}^k X_k \ .$$

Mostre que têm lugar as equações de estrutura de Maurer-Cartan

$$d\omega^i = -\frac{1}{2}\sum_{jk} C_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k \ .$$

Sugestão: use a seguinte identidade para formas-um ω:

$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]) \ , \ X,Y \in \mathcal{X}(G) \ .$$