Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Mestrado em Matemática Aplicada

Grupos de Lie e Algebras de Lie

2001/2002 – 2º Semestre

Séries de Exercícios para Resolver em Casa

3ª Série – A entregar até dia 30/04/2002 (na aula)

1. Mostre que

$$e^{tC}e^{sC} = e^{(t+s)C} \quad \forall t, s \in \mathbb{R} \text{ e } C \in M_n(\mathbb{K}) \ (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{K} = \mathbb{C}) \ .$$

2. Mostre que o isomorfismo de espaços lineares

$$\begin{aligned} \chi_I \ : \ gl(n, \mathbb{R}) \equiv (M_n(\mathbb{R}), [\cdot, \cdot]) \ &\to \ \mathrm{Lie}(GL(n, \mathbb{R})) \\ C = (c_{kj}) \ &\mapsto \ \sum_{k,j} c_{kj} \left(\frac{\partial}{\partial a_{kj}} \right)_I \end{aligned}$$

é um isomorfismo de algebras de Lie.

3. Mostre que as álgebras de Lie lineares $so(n, \mathbb{K})$ e $o(n, \mathbb{K})$ dos grupos de Lie $SO(n, \mathbb{K})$ e $O(n, \mathbb{K})$ coincidem

$$so(n, \mathbb{K}) = o(n, \mathbb{K}) \ .$$

Determine a dimensão dos respectivos grupos de Lie.

4. Mostre que a algebra de Lie $\mathcal{A}_n^{\mathrm{ET}}(\mathbb{K})$ das matrizes estritamente triangulares superiores é nilpotente.

5. Mostre que a soma de dois ideais solúveis é um ideal solúvel (ver Knapp).