Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Mestrado em Matemática Aplicada

Grupos de Lie e Algebras de Lie

2001/2002 – 2º Semestre

Séries de Exercícios para Resolver em Casa

4ª Série – A entregar até dia 23/05/2002 (na aula)

1. Mostre, usando o critério de Cartan de solvabilidade, que a álgebra de Lie das matrizes triangulares superiores, $\mathcal{A}_n^T(\mathbb{K})$, é uma álgebra de Lie solúvel.
Sugestão: Use uma base em $\mathcal{A}_n^T(\mathbb{K})$ adaptada à decomposição considerada nas aulas

$$\mathcal{A}_n^T(\mathbb{K}) = \oplus_{k=0}^{k=n-1} \mathcal{V}_k \ ,$$

onde $\mathcal{V}_k = \left\{ \sum_{j=1}^{n-k} c_j P_{jj+k} \ , \ c_j \in \mathbb{C} \right\}$.

2. Seja ρ uma representação de $sl(2,\mathbb{C}) = \{C \in M_2(\mathbb{C}) : \ \mathrm{tr}(C) = 0\} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{h, e, f\}$ no espaço vectorial de dimensão finita V.
Sugestão: ver Knapp, Lema 1.65.

a) Mostre que o endomorfismo Z

$$Z = \frac{1}{2}\rho(h)^2 + \rho(h) + 2\rho(f)\rho(e)$$

comuta com $\rho(X)$ para todo o $X \in sl(2,\mathbb{C})$.

b) Se ρ é irredutível o que é que pode concluir em relação a Z?

c) Determine o valor próprio de Z na representação irredutível de dimensão n.

3. Construa uma decomposição em espaços-raíz para as álgebras de Lie $so(2n,\mathbb{C})$ $(n \geq 2)$.
Sugestão: ver Knapp.