# Grupos e Álgebras de Lie 2001/2002 – Resolução do Exame Tipo

Mestrado em Matemática Aplicada

Duração: 2h30

I.

## I.1. Sabendo que

$$sp(n, \mathbb{C}) = \{ C \in M_{2n}(\mathbb{C}) : e^{sC} \in SP(n, \mathbb{C}) , \forall s \in \mathbb{R} \}$$

mostre que  $sp(n, \mathbb{C}) = \mathcal{G}$ , onde

$$\mathcal{G} = \left\{ C \in M_{2n}(\mathbb{C}) : CJ_n = -J_nC^t \right\} ,$$

е

$$J_n = \left( \begin{array}{cc} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{array} \right) .$$

# Resolução:

Se  $C\in\mathcal{G}$  então  $J_nC^t=-CJ_n$  e portanto  $J_n(C^t)^k=(-C)^kJ_n\ \forall k\in\mathbb{N}.$  Assim,

$$e^{sC} J_n e^{sC^t} = e^{sC} J_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k (C^t)^k}{k!}$$

$$e^{sC} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k (-C)^k}{k!} J_n = e^{sC} e^{-sC} J_n = J_n , \forall s \in \mathbb{R}$$

e portanto  $C \in sl(n,\mathbb{C})$  e  $\mathcal{G} \subset sp(n,\mathbb{C}).$ 

Seja agora  $C \in sp(n,\mathbb{C})$  pelo que

$$e^{sC}J_ne^{sC^t} = J_n , \quad \forall s \in \mathbb{R} .$$
 (1)

Derivando ambos os membros de (1) em ordem a s e tomando s=0 obtemos

$$CJ_n + J_nC^t = 0 ,$$

e portanto  $C \in \mathcal{G}$  e  $\mathcal{G} = sp(n, \mathbb{C})$ .

**1.2.** Seja  $\mathcal{G} = \operatorname{Lie}(G)$ . Mostre que a aplicação exponencial,  $\exp : \mathcal{G} \to G$ , é um difeomorfismo de uma vizinhança de  $0 \in \mathcal{G}$  para uma vizinhança de  $e \in G$ .

**Sugestão:** Use  $\exp(tE) = a_1^{(t\varphi(E))} = a_t^{(\varphi(E))}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}, \ \forall E \in \mathcal{G}$ , onde  $\varphi(E)$  designa o campo vectorial invariante à esquerda tal que  $\varphi(E)_e = E$ .

## Resolução:

Seja  $\mathcal{G} = \operatorname{Lie}(G) = T_eG$ . A aplicação  $\exp$  é de classe  $C^{\infty}$  e  $\exp(0) = e$  pelo que basta mostrar que a aplicação

$$\underline{\exp}_{*_0} : T_0 \mathcal{G} \to T_e G = \mathcal{G}$$

é um isomorfismo de espaços lineares. Mostremos que  $\exp_{*_0}$  é a aplicação inversa do isomorfismo

$$\chi_0 : \mathcal{G} \to T_0 \mathcal{G}$$
  
 $\chi_0(E) = \frac{d}{dt} (tE)_{|_{t=0}} .$ 

De facto

$$\underline{\exp}_{*_0}(\chi_0(E)) = \underline{\exp}_{*_0}(\frac{d}{dt}(tE)_{|_{t=0}}) = \frac{d}{dt}_{|_{t=0}}\underline{\exp}(tE) = E ,$$

uma vez que  $\exp(tE)$  é a curva integral do campo invariante à esquerda com valor E em  $e \in G$ .

**1.3.** Mostre que, num grupo de Lie G, os campos invariantes à esquerda comutam com os campos invariantes à direita.

Sugestão: É suficiente mostrar que os respectivos fluxos comutam.

## Resolução:

Sejam X e Y campos invariantes à esquerda e direita respectivamente. Uma vez que os seus fluxos são  $\psi_t^{(X)}=R_{\exp(tX)}$  e  $\psi_s^{(Y)}=L_{\exp(sY)}$  tem-se

$$\begin{split} & \left( R_{\underline{\exp}(tX)} \circ L_{\underline{\exp}(sY)} \right)(g) = \underline{\exp}(sY) g \underline{\exp}(tX) = \\ & = \left( L_{\underline{\exp}(sY)} \circ R_{\underline{\exp}(tX)} \right)(g) \;, \forall s,t \in \mathbb{R} \;, \; \forall g \in G \;, \end{split}$$

o que mostra que os fluxos comutam.

## II.

**II.1.** Considere a álgebra de Lie definida por  $\mathcal{G} = \operatorname{span}_{\mathbb{C}} \{X,Y\}$  e [X,Y] = Y. Mostre, usando o critério de Cartan, que  $\mathcal{G}$  é solúvel.

## Resolução:

A primeira derivada de  $\mathcal{G}$  é

$$\mathcal{G}^{(1)} = \operatorname{span}_{\mathbb{C}} \{Y\} .$$

As matrizes de  $ad_X$  e de  $ad_Y$  na base  $\{X,Y\}$  são

$$(ad_X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P_{22} , \quad (ad_Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -P_{21} .$$

Os produtos internos de Y com os elementos da base são então  $B(X,Y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}_X \circ \operatorname{ad}_Y) = 0$  e  $B(Y,Y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}_Y \circ \operatorname{ad}_Y) = 0$  pelo que  $\mathcal{G}^{(1)} \perp \mathcal{G}$  e  $\mathcal{G}$  é solúvel pelo critério de Cartan.

**II.2.** Existe algum homomorfismo sobrejectivo de  $sl(2,\mathbb{C})$  para  $\mathcal{G}$ ? Porquê?

## Resolução:

Não porque como condição necessária para a existência de um homomorfismo sobrejectivo de  $sl(2,\mathbb{C})$  para  $\mathcal{G}$ ,  $sl(2,\mathbb{C})$  teria de ter um ideal de dimensão um. Mas  $sl(2,\mathbb{C})$  é simples pelo que não contém ideais próprios diferentes de zero.

**II.3.** Construa um homomorfismo injectivo de  $\mathcal{G}$  para  $sl(2,\mathbb{C})$ .

**Resolução:** É suficiente encontrar dois elementos linearmente independentes de  $sl(2,\mathbb{C})$   $\widetilde{X}$  e  $\widetilde{Y}$  que tenham o mesmo parentesis que X e Y ou, mais precisamente, tais que  $[\widetilde{X},\widetilde{Y}]=\widetilde{Y}$ . Uma possibilidade é  $\widetilde{X}=\frac{1}{2}h$  e  $\widetilde{Y}=e$ , onde  $h=P_{11}-P_{22}$  e  $e=P_{12}$  e portanto [h,e]=2e. Um homomorfismo é então dado por

$$\varphi(aX + bY) = \frac{a}{2}h + be = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & b \\ 0 & -\frac{a}{2} \end{pmatrix}.$$

**II.4.** Determine o núcleo de  $\rho_{\mathrm{Ad}}$ , a representação adjunta de  $SL(n,\mathbb{C})$ ,  $(SL(n,\mathbb{C}), sl(n,\mathbb{C}), \rho_{\mathrm{ad}})$ ,

$$\rho_{\rm ad}(A)(C) = ACA^{-1}$$
.

## Resolução:

O núcleo é dado por

$$\begin{split} Ker(\rho_{\mathrm{ad}}) &= \left\{ A \in SL(n,\mathbb{C}) \ : \ ACA^{-1} = C \ , \ \forall C \in sl(n,\mathbb{C}) \right\} = \\ &= \left\{ A \in SL(n,\mathbb{C}) \ : \ AC = CA \ , \ \forall C \in sl(n,\mathbb{C}) \right\} = \left\{ A = \lambda I_n \ , \lambda^n = 1 \right\} \ , \\ \text{coincidindo com o centro de } SL(n,\mathbb{C}) \ \text{(isomorfo a $\mathbb{Z}_n$)}. \end{split}$$

III.

#### **III.1**

III.1.a) Considere a decomposição em espaços raíz de uma álgebra de Lie semisimples complexa. Mostre que  $\mathcal{G}_{\alpha} \perp \mathcal{G}_{\beta}$  (em relação à forma de Killing) se  $\alpha, \beta \in \Delta \cup \{0\}$  e  $\alpha + \beta \neq 0$ .

#### Resolução:

Se 
$$E_{\alpha} \in \mathcal{G}_{\alpha}, E_{\beta} \in \mathcal{G}_{\beta}, X \in \mathcal{G}_{\lambda}$$
 então

$$\operatorname{ad}_{E_{\alpha}} \circ \operatorname{ad}_{E_{\beta}}(X) \in \mathcal{G}_{\lambda + \alpha + \beta}$$

pelo que o endomorfismo  $\mathrm{ad}_{E_\alpha}\circ\mathrm{ad}_{E_\beta}$ , numa base adaptada à decomposição em espaços raíz, não tem entradas na diagonal se  $\alpha+\beta\neq 0$  e assim  $B(E_\alpha,E_\beta)=\mathrm{tr}\left(\mathrm{ad}_{E_\alpha}\circ\mathrm{ad}_{E_\beta}\right)=0.$ 

**III.1.b)** Mostre que se  $\alpha \in \Delta$  então  $-\alpha \in \Delta$ .

## Resolução:

Como a forma de Killing B de uma álgebra semisimples é não degenerada, se  $0 \neq X \in \mathcal{G}_{\alpha}$  da alínea anterior concluímos que  $B(X, \mathcal{G}_{-\alpha}) \neq 0$  pois caso contrário  $X \in \operatorname{rad}(B)$ .

**III.2** Mostre que o grupo de Weyl é um subgrupo finito de  $O(\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^*, <\cdot, \cdot>)$ .

## Resolução:

O grupo de transformações lineares de Weyl, W, preserva o produto interno  $<\cdot,\cdot>$  em  $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^*$ ,  $W\subset O(\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^*,<\cdot,\cdot>)$ , e o sistema de raízes  $\Delta\subset\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^*$ . Consideremos o homomorfismo

$$\varphi : W \to \operatorname{Trans}(\Delta)$$

$$w \mapsto w_{|_{\Delta}}.$$

O grupo  $\operatorname{Trans}(\Delta)$  das aplicações bijectivas de  $\Delta$  em  $\Delta$  é finito. Uma vez que  $\Delta$  gera  $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^*$ , o núcleo de  $\varphi$  é trivial

$$\operatorname{Ker}(\varphi) = \left\{ w \in W \ : \ w_{|_{\Delta}} = Id_{\Delta} \right\} = \left\{ Id_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^*} \right\} \ ,$$

pelo que W é isomorfo à sua imagem  $\varphi(W) \subset \operatorname{Trans}(\Delta)$  e portanto é um grupo finito.

**III.3** Sabendo que  $B_2 \cong so(5,\mathbb{C})$  determine o número de raízes positivas de  $B_2$ . Usando o grupo de Weyl determine, a partir do diagrama de Dynkin para  $B_2$ , as raízes positivas não simples de  $B_2$ .

## Resolução:

Uma vez que  $so(5,\mathbb{C})$  coincide com a algebra de Lie das matrizes antisimétricas  $5\times 5$  a sua dimensão é  $\dim(so(5,\mathbb{C}))=\dim(B_2)=5\times 4/2=10$ . Logo o número de raízes positivas é

$$\#(\Delta^+) = \frac{\dim(B_2) - \operatorname{rank}(B_2)}{2} = 4,$$

sendo duas as raízes positivas não simples. A matriz de Cartan obtida a partir do diagrama de Dynkin é

$$\left(\begin{array}{cc} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{array}\right) .$$

Aplicando a transformação de Weyl  $s_{\alpha_1}$  a  $\alpha_2$  obtemos a raíz positiva

$$s_{\alpha_1}(\alpha_2) = \alpha_2 - 2 \frac{\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle}{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle} \alpha_1 = \alpha_2 - A_{12}\alpha_1 = \alpha_2 + 2\alpha_1 \in \Delta^+$$
.

Das propriedades de  $\alpha$ -cordas que passam por raízes podiamos concluir desde já que  $\alpha_2+\alpha_1$  também é uma raíz positiva (e portanto a única que faltava). Por outro lado também

$$s_{\alpha_2}(\alpha_1) = \alpha_1 - 2 \frac{\langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle}{\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle} \alpha_2 = \alpha_1 - A_{21}\alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_1 \in \Delta^+$$
.

IV

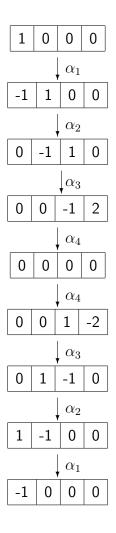
**IV.a)** Determine o sistema de pesos da representação irredutível  $\rho_{\lambda_1}$  de  $B_4 \cong so(9,\mathbb{C})$ .

## Resolução:

As linhas da matriz de Cartan transposta de  $B_2$ 

$$\left(\begin{array}{ccccc}
2 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -2 \\
0 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right)$$

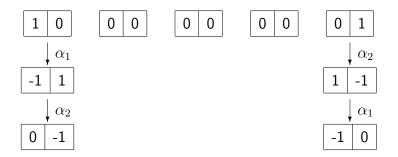
dão os coeficientes da decomposição das raízes simples na base de pesos fundamentais. Com base nas propriedades das  $\alpha$  cordas através de pesos obtemos o seguinte sistema de pesos para a representação irredutível com peso máximo  $\lambda_1$ :



**IV.b)** Determine o sistema de pesos da restrição de  $\rho_{\lambda_1}$  a uma subalgebra regular  $A_2\subset B_4.$ 

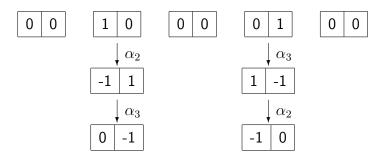
# Resolução:

Escolhendo a subalgebra  $A_2$  correspondente às raízes simples  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  obtemos da alínea anterior o seguinte sistema de pesos para  $\rho_{\lambda_1}{}_{|A_2}$ 



## Resolução Alternativa:

Como subalgebra  $A_2$  regular podiamos escolher também a correspondente às raízes simples  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$ . Da alínea anterior obtemos o seguinte sistema de pesos para  $\rho_{\lambda_{1_{|A_2}}}$  para este caso



**IV.c)** Diga justificando qual o peso máximo de  $\rho = \rho_{\lambda_1} \wedge \rho_{\lambda_1}$ .

## Observação:

Pode usar o facto de que o peso máximo de uma representação irredutível de peso máximo  $\mu$  tem multiplicidade um.

## Resolução:

Existe uma base de vectores peso da representação  $\rho_{\lambda_1} \wedge \rho_{\lambda_1}$  da forma  $u \wedge v$ , onde  $u \in v$  são vectores peso da representação  $\rho_{\lambda_1}$ .

Como o peso máximo de uma representação irredutível de peso máximo  $\mu$  tem multiplicidade um no produto exterior não há nenhum vector com peso  $2\mu$  pelo que o peso máximo é  $\mu+\tilde{\mu},$  onde  $\tilde{\mu}$  é o peso maior a seguir a  $\mu.$  No caso que estamos a considerar  $\mu=\lambda_1$  e  $\tilde{\mu}=\lambda_1-\alpha_1=-\lambda_1+\lambda_2.$  Um vector peso máximo é dado por  $v_1\wedge v_2$  onde  $v_1$  é um vector peso com peso  $\lambda_1$  e  $v_2$  é um vector peso com peso  $-\lambda_1+\lambda_2.$  O peso máximo é então  $\lambda_{max}=\mu+\tilde{\mu}=\lambda_2.$