Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Mestrado em Matemática Aplicada
Grupos de Lie e Algebras de Lie
2001/2002 – 2º Semestre
Séries de Exercícios para Resolver em Casa

Sugestão: 1º exercício da 2ª Série

1. O objectivo consiste em indicar um homomorfismo de matrizes de $SU(2)$ para matrizes de $SO(3,\mathbb{R})$

$$\varphi \ : \ SU(2) \to SO(3,\mathbb{R}) \ .$$

A resolução é feita de forma análoga à construção do resestimento duplo de $SO^+(1,3)$ por $SL(2,\mathbb{C})$ descrita na aula. Considere o espaço linear real de dimensão 3 de matrizes complexas 2×2, hermíticas de traço nulo:

$$V = \left\{ C \in M_2(\mathbb{C}) \ : \ C^\dagger = C, \ tr(C) = c_{11} + c_{22} = 0 \right\}$$

com forma bilinear simétrica B (com valores em $\mathbb{R}$ quando consideramos só matrizes de V) dada por:

$$B(C,C') = \frac{1}{2} tr(CC') \ , C, C' \in V.$$

(Note que $B(C,C) = \frac{1}{2}tr(C^2) = det(C), \ C \in V$).

Dada a matriz unitária U

$$U = \begin{pmatrix} u_1 + iu_2 & -v_1 + iv_2 \\ v_1 + iv_2 & u_1 - iu_2 \end{pmatrix} \qquad |u|^2 + |v|^2 = u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 = 1 \ ,$$

considere a transformação $\widetilde{\varphi}_U \in Aut(M_2(\mathbb{C}))$

$$\widetilde{\varphi}_U(C) = UCU^\dagger \ .$$

Mostre que $\widetilde{\varphi}_U$ preserva V (i.e. $\widetilde{\varphi}_U(V) = V$), e a forma bilinear B pelo que podemos considerar que $\widetilde{\varphi}_U$ é uma aplicação (homomorfismo de grupos de Lie) de $SU(2)$ para $O(V,B)$.

Para completar e ter o homomorfismo de $SU(2)$ para $SO(3,\mathbb{R})$ falta só escolher/encontrar uma base ortonormada em V e fazer as contas determinando a matriz ortogonal φ_U que corresponde à matriz unitária U.