Análise Matemática III
1º semestre de 2000/2001

Exercício Resolvido 6

Um fio C, com densidade de massa $\rho(x,y,z) = |x(y+1)|$, tem a configuração da intersecção das superfícies

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2+y^2}\}$ e $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y + \sqrt{2}z = 1\}$.

Calcule a massa de C.

Resolução: A massa do fio é dada pelo integral de linha

$$m = \int_C \rho.$$

Para calcular este integral de linha precisamos de determinar uma parametrização para a curva C. Comecemos por determinar a equação da projecção, C', de C no plano xOy:

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-y) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2 = \tfrac{1}{2} - y + \tfrac{y^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \qquad x^2 + \tfrac{(y+1)^2}{2} = 1.$$

Portanto a projecção C' é uma elipse centrada no ponto $(0,-1,0)$ com eixo maior de comprimento $\sqrt{2}$ e eixo menor de comprimento 1. Uma parametrização para C pode ser definida por

$$g(t) = (\cos(t), \sqrt{2}\operatorname{sen}(t) - 1, \sqrt{2} - \operatorname{sen}(t)), \quad t \in [0, 2\pi],$$

onde se usou o facto de que, quando t percorre o intervalo $[0,2\pi]$, a função $(\cos(t), \sqrt{2}\operatorname{sen}(t) - 1, 0)$ percorre a projecção C' e que o único ponto de C por cima de $(\cos(t), \sqrt{2}\operatorname{sen}(t) - 1, 0)$ tem coordenada z dada por

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - y(g(t))) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - (\sqrt{2}\operatorname{sen}(t) - 1)) = \sqrt{2} - \operatorname{sen}(t).$$

Temos

$$g'(t) = (-\operatorname{sen}(t), \sqrt{2}\cos(t), -\cos(t))$$
$$||g'(t)|| = \sqrt{\operatorname{sen}^2(t) + 2\cos^2(t) + \cos^2(t)} = \sqrt{1 + 2\cos^2(t)}$$
$$\rho(g(t)) = |\cos(t)(\sqrt{2}\operatorname{sen}(t) - 1 + 1)| = \frac{1}{\sqrt{2}}|\operatorname{sen}(2t)|,$$

logo

$$m = \int_0^{2\pi} \rho(g(t))||g'(t)||dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen}(2t)|\sqrt{1+2\cos^2(t)}dt$$
$$= \frac{4}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(2t)\sqrt{1+2\cos^2(t)}dt = \frac{4}{3\sqrt{2}}\left[-(1+2\cos^2(t))^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{4}{3\sqrt{2}}(3^{\frac{3}{2}} - 1).$$