Análise Matemática III
1º semestre de 2000/2001
(a entregar na semana de 27/11/2000)

Exercício Teste 10
Considere o conjunto

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 + 1; -1 < z < 1\}.$$

Mostre que M é uma variedade, indicando explicitamente parametrizações cujas imagens cubram M. Determine a dimensão de M.

Solução:
O Conjunto M é um pedaço de hiperbolóide compreendido entre os planos $z = -1$ e $z = 1$, conforme representado na Figura 1.

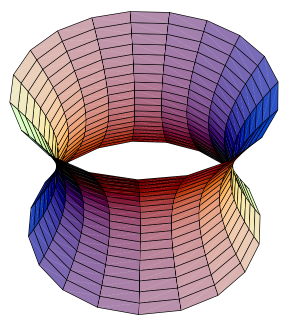

Figura 1. A variedade M

Em coordenadas cilíndricas podemos descrever M da forma seguinte

$$\rho = \sqrt{z^2 + 1}; \quad -1 < z < 1.$$

Assim, podemos escrever duas parametrizações, dadas por

$$g_1(\theta, z) = (\sqrt{z^2+1}\cos\theta, \sqrt{z^2+1}\,\mathrm{sen}\,\theta, z), \qquad (\theta, z) \in V_1 =]0, 7\pi/4[\times]-1, 1[$$
$$g_2(\theta, z) = (\sqrt{z^2+1}\cos\theta, \sqrt{z^2+1}\,\mathrm{sen}\,\theta, z), \qquad (\theta, z) \in V_2 =]-\pi, 3\pi/4[\times]-1, 1[.$$

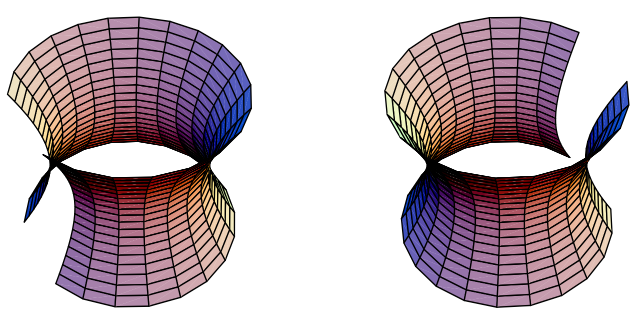

Figura 2. Vizinhanças de coordenadas correspondentes às parametrizações g_1 (à esquerda) e g_2 (à direita).

As funções g_1 e g_2 são de classe C^1, injectivas, e têm matrizes jacobianas dadas pela mesma expressão (para valores diferentes de (θ, z)):

$$Dg_1(\theta, z) = Dg_2(\theta, z) = \begin{bmatrix} -\sqrt{z^2+1}\,\mathrm{sen}\,\theta & \dfrac{z\cos\theta}{\sqrt{z^2+1}} \\ \sqrt{z^2+1}\cos\theta & \dfrac{z\,\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{z^2+1}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz tem caracterítica 2 pois o produto externo

$$\begin{aligned}(-\sqrt{z^2+1}\,\mathrm{sen}\,\theta, \sqrt{z^2+1}\cos\theta, 0) \times (\frac{z\cos\theta}{\sqrt{z^2+1}}, \frac{z\,\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{z^2+1}}, 1) &= \\ = (\sqrt{z^2+1}\cos\theta, \sqrt{z^2+1}\,\mathrm{sen}\,\theta, -z)&\end{aligned}$$

é diferente de zero (tem norma $\sqrt{2z^2+1}$), o que implica que as colunas são linearmente independentes. Portanto, g_1 e g_2 são parametrizações. Como $M = g_1(V_1) \cup g_2(V_2)$, concluímos que M é uma variedade de dimensão 2 (igual ao número de variáveis das parametrizações).