Análise Matemática III
1º Semestre de 2000/2001

Exercício teste 11 (a entregar na aula prática da semana de 4/12 a 8/12)
Decomponha 1 num produto de três números positivos cuja soma seja mínima.
Solução: O problema pode ser visto como a determinação do mínimo da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

no conjunto

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 1, x, y, z > 0\right\}.$$

Este mínimo tem que existir porque f é positiva e $f(x, y, z) \to +\infty$ quando $\|(x, y, z)\| \to +\infty$.

É fácil ver que o conjunto D é uma variedade definida localmente pela equação

$$xyz - 1 = 0 \Leftrightarrow F(x, y, z) = 0.$$

Portanto os extremos de f ao longo de D são dados pelo método dos multiplicadores de Lagrange:

$$\left\{\begin{array}{c} \nabla f = \lambda \nabla F \\ F = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 1 = \lambda yz \\ 1 = \lambda xz \\ 1 = \lambda xy \\ xyz - 1 = 0 \end{array}\right.$$

Estas equações implicam $x, y, z, \lambda \neq 0$ e são portanto equivalentes a

$$x = y = z = \lambda = 1$$

que tem então que ser a única solução do problema.