Análise Matemática III
1º semestre de 2000/2001

Exercício teste 7

Enunciado:
Considere o campo vectorial $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ definido por $f(x, y, z) = (y^2z, 2xyz, xy^2)$.

a) Sabendo que f define uma força conservativa, encontre um potencial ϕ para f.

b) Calcule o trabalho de f ao longo da espiral parametrizada pelo caminho $g(t) = (2\cos(t), 2\,\mathrm{sen}(t), t)$ com $t \in [0, \pi/4]$.

c) Seja C uma curva regular fechada em $\mathbb{R}^3$. O que pode dizer sobre o trabalho de f ao longo de C ?

Solução:

a) O potencial ϕ satisfaz a condição $\nabla\phi = f$, ou seja vamos ter $\frac{\partial\phi}{\partial x} = y^2z, \frac{\partial\phi}{\partial y} = 2xyz$ e $\frac{\partial\phi}{\partial z} = xy^2$. Integrando a primeira equação, obtem-se $\phi(x, y, z) = xy^2z + g(y, z)$ onde $g(y, z)$ é arbitrária. Substituindo na segunda e terceira equações obtemos $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z} = 0$, pelo que g é uma constante que podemos tomar como sendo zero. (Recorde-se que o potencial ϕ está definido a menos de uma constante.)

Concluímos que podemos tomar $\phi(x, y, z) = xy^2z$.

Nota: Em geral é preciso cuidado quando se tenta calcular o potencial deste modo. Quando não sabemos à partida se o campo vectorial f é conservativo, é muito importante verificar se o potencial ϕ obtido está bem definido e é de classe C^1 na região em que está definido o problema. Só nesse caso temos a garantia que f é conservativa.

Também é possível encontrar ϕ recorrendo ao teorema fundamental do cálculo para integrais de linha, que diz que sendo f conservativa e escolhendo-se um ponto base p_0, se tem

$$\phi(p) = \int_{p_0}^{p} f,$$

onde o integral é ao longo de um caminho diferenciável qualquer que ligue p_0 a p. No nosso caso podemos escolher $p_0 = 0$ e o caminho como sendo o segmento de recta que une p à origem, parametrizado por $h(t) = (tx, ty, tz)$, com $t \in [0, 1]$. Obtemos então,

$$\phi(x, y, z) = \int_0^1 f(h(t)) \cdot h'(t)dt = \int_0^1 (t^3y^2z, 2t^3xyz, t^3xy^2) \cdot (x, y, z)dt =$$

$$= \int_0^1 4xy^2zt^3dt = xy^2z,$$

que é o resultado obtido acima.

b) Para calcular o trabalho de f ao longo da espiral vamos utilizar o teorema fundamental do cálculo,

$$W = \int f dg = \int \nabla\phi\, dg = \phi(g(\pi/4)) - \phi(g(0)) = \phi(2\sqrt{2}/2, 2\sqrt{2}/2, \pi/4) - \phi(2, 0, 0) = \sqrt{2}\pi/2.$$

Note-se que seria muito mais difícil fazer este cálculo directamente utilizando a definição de trabalho.

c) Seja p um ponto da curva C e $l(t)$, com $t \in [a, b]$, um caminho que parametrize C e tal que $l(a) = l(b) = p$. Então, pelo teorema fundamental do cálculo temos

$$\int f dl = \int \nabla\phi \, dl = \phi(l(b)) - \phi(l(a)) = \phi(p) - \phi(p) = 0.$$

Logo, o trabalho da força conservativa f ao longo de uma curva fechada é zero.