Análise Matemática III
Exercícios

Teoremas da Função Inversa e da Função Implícita

1 Para cada um dos casos seguintes determine o conjunto de pontos em que o jacobiano de f é não nulo. Indique explicitamente o conjunto $f(S)$. Se f fôr injectiva, determine f^{-1} explicitamente.

i) $f(x, y) = (x + 2y, x - y), \quad S = \mathbb{R}^2$.

ii) $f(x, y) = (x^2 - y^2, xy), \quad S = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

iii) $f(x, y) = (\log xy, 1/(x^2 + y^2)), \quad S = \{(x, y) : 0 < y < x\}$.

2 Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} u &= xy + \operatorname{sen}(x + y) \\ v &= e^{-x+y-2} + \frac{x}{y} \end{cases}$$

Mostre que existem vizinhanças de $(u, v) = (-1, 0)$ e de $(x, y) = (-1, 1)$ tais que o sistema define (x, y) como uma função de (u, v) desde que as variáveis estejam nessas vizinhanças. Calcule $\frac{\partial x}{\partial u}(-1, 0)$.

3 Considere o sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} u &= x^2y^3 + \operatorname{sen}(x + y) - 1 \\ v &= \operatorname{sen}(xy) + x - y + 1 \end{cases}$$

a) Mostre que existem vizinhanças de $(x, y) = (0, 0)$ e de $(u, v) = (-1, 1)$ tais que aquele sistema define (x, y) como uma função C^1 de (u, v) em tais vizinhanças.

b) Calcule a matriz jacobiana da função cuja existência garantiu na alínea anterior no ponto $(-1, 1)$.

4 Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x, y) = (2xy, x^2 - y^2)$. Determine, justificadamente, o conjunto de pontos em que existe inversa local de f. Determine a matriz jacobiana da função inversa f^{-1} no ponto $f(1, 1)$.

5 Mostre que a equação $xcos(xy) = 0$ define, implicitamente, uma função $y = f(x)$ nalguma vizinhança do ponto $(1, \frac{\pi}{2})$. Calcule a derivada $\frac{df}{dx}(1)$.

6 Considere a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y, z) = (x^2+y^2+z^2, x-y)$ e o conjunto $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = (2, 0)\}$. Use o teorema da função implícita para justificar que, numa vizinhança do ponto $(1, 1, 0)$, o conjunto C é o gráfico de uma função $f : I \to \mathbb{R}^2$, em que I é um intervalo aberto em $\mathbb{R}$.

7 Considere o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\}$. Determine os pontos em torno dos quais o Teorema da Função Implícita não garante que y pode ser expresso em função de x. Analise se y pode, ou não, ser expresso em função de x, em torno dos pontos em que o Teorema da Função Implícita não é aplicável.

8 Mostre que existe uma vizinhança de $(u, v) = (0, 0)$ onde o sistema

$$\begin{cases} x &= u - v + \log(1 + uv) \\ y &= u + v - u^2 v^2 \end{cases}$$

define u e v como funções C^∞ de (x, y). Calcule $\frac{\partial u}{\partial y}(0, 0)$.

9 Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = (y - x)x^2 y$. Considere o conjunto de nível de g dado por $g(x, y) = 2$. Determine se existe alguma vizinhança de $(1, 2)$ em que aquele conjunto seja o gráfico de uma função ϕ (que nos dê y em termos de x). Calcule $\phi'(1)$ se tal derivada existir. Decida se ϕ é crescente ou decrescente em alguma vizinhança de $x = 1$.

10 Considere o conjunto

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \ ; \ x + e^y + z = 1\}$$

a) Prove que existe uma vizinhança U do ponto $(-1, 0, 1)$, um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ com $1 \in I$ e funções f e g tais que

$$L \cap U = \{(f(z), g(z), z) : z \in I\}$$

b) Calcule as derivadas $f'(1)$ e $g'(1)$.