Análise Matemática III
Exercícios

Variedades. Multiplicadores de Lagrange

1. Descreva parametricamente e determine a dimensão de cada uma das seguintes variedades:

   i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\}$

   ii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \tan x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$

   iii) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1;\ y > |x|;\ |z| < 2\}$

   iv) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2+y^2} - 4)^2 + z^2 = 1\}$

   v) Porção da esfera em $\mathbb{R}^3$ centrada na origem e de raio um, compreendida entre os planos $y = 0$ e $y = x$.

2. Considere a variedade $M = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 = 1,\ z = x^2 - y^2\big\}$.

   i) Determine a dimensão de M.

   ii) Determine o espaço tangente e o espaço normal a M no ponto $(1,0,1)$.

3. Considere a variedade dada por

$$N = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z^2,\ |z| < 1\ \}$$

   i) Descreva N parametricamente e determine a respectiva dimensão.

   ii) Determine o espaço tangente e o espaço normal a N no ponto $(1,0,0)$.

4. Seja M a variedade em $\mathbb{R}^2$ dada pelo gráfico da função $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ sendo $f(x) = \operatorname{sen} x$.

   i) Determine a dimensão de M.

   ii) Determine o espaço normal a M no ponto $(0,0)$.

5. Considere a variedade dada por $C = \{(e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t) \in \mathbb{R}^2 : t \in]0, 2\pi[\}$.

   i) Mostre que C tem dimensão 1 e determine o espaço tangente e o espaço normal a C no ponto $(0, e^{\pi/2})$.

   i) Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma bijecção de classe C^1 com inversa de classe C^1. Mostre que $\varphi(C) \equiv \{\varphi(x,y) : (x,y) \in C\}$ é também uma variedade diferenciável de dimensão 1.

   i) Sabendo que a matriz jacobiana de φ em $(0, e^{\pi/2})$

$$J_\varphi(0, e^{\pi/2}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

   calcule o espaço tangente a $\varphi(C)$ no ponto $\varphi(0, e^{\pi/2})$.

6. Considere a elipse dada por $E = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\ \}$ e a função $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(x,y) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{3})$.

i) Descreva parametricamente o conjunto $\phi(E)$ e mostre que se trata de uma variedade de dimensão 1.

ii) Determine o espaço tangente e o espaço normal a $\phi(E)$ no ponto $\phi(2,0)$.

iii) Determine os pontos de E mais próximos de $(1,0)$.

7. Para cada um dos seguintes casos, determine os extremos da função f no conjunto S:

   i) $f(x,y) = x, \quad S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 3\}$

   ii) $f(x,y) = x^2 + y^2, \quad S = \{(x,2) : x \in \mathbb{R}\}$

   iii) $f(x,y) = x^2 - y^2, \quad S = \{(x, \cos x) : x \in \mathbb{R}\}$

   iv) $f(x,y,z) = xyz, \quad S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

   v) $f(x,y,z) = x + y + z, \quad S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2;\ x + z = 1\}$

8. Determine os extremos da função $f(x,y,z) = x - y + z$ sujeita à condição $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

9. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar os máximos da função $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ no disco de raio 1 e centro na origem de $\mathbb{R}^2$.

10. Uma caixa rectangular, sem tampa, tem área igual a 16 m^2. Determine as dimensões da caixa que maximizam o seu volume.

11. Estabeleça a lei de Snell

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

    para a refracção sofrida por um raio de luz no plano de separação de dois meios transparentes e homogêneos. Supõe-se que o percurso efectuado pelo raio de luz, entre dois pontos, é feito em tempo mínimo.

    θ_1 e θ_2 são, respectivamente, os ângulos de incidência e de refracção com a normal ao plano separador, v_1 e v_2 são as velocidades da luz no meio de incidência e no meio de refracção.

12. Seja $A_{3\times 3}$ uma matriz simétrica e não nula, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \frac{1}{2}(Ax) \cdot x$ e considere a esfera $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$. Sabendo que f tem máximo e mínimo em S, prove que existe $x \in S$ e $\lambda \neq 0$ tais que $Ax = \lambda x$.

13. Em algumas situações considera-se que a superfície da Terra é dada pelo plano $z = 0$ e o campo gravítico definido por $F(x,y,z) = (0,0,-mg)$, sendo g a aceleração da gravidade. Suponha que as posições de equilíbrio de uma partícula de massa m, sujeita à acção do campo F, correspondem aos extremos do potencial gravítico. Determine os pontos de equilíbrio de uma partícula de massa m cujo movimento ocorre sobre uma esfera dada por $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ com $r > 0$.