Análise Matemática III
Exercícios

Integrais em Variedades

1 Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$ o hemisfério norte da esfera de raio 1. Seja n a normal exterior unitária de S. Considere o campo vectorial $f(x, y, z) = (x, y, 0)$. Calcule $\int_S f \cdot n$,

a) Usando uma parametrização em termos de coordenadas esféricas θ e ϕ.

b) Usando uma parametrização do tipo $z = (1 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$.

2 Considere uma superfície esférica de raio a em $\mathbb{R}^3$ de densidade de massa (por unidade de área) constante ρ. Calcule o seu momento de inércia em relação a qualquer diâmetro e mostre que é igual a $\frac{2}{3}ma^2$, onde m é a massa total da superfície.

3 Calcule as coordenadas do centro de massa do pedaço de superfície esférica homogénea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x, y \geq 0,\ z \geq 0\}$.

4 Seja M a superfície plana em $\mathbb{R}^3$ cuja fronteira é o triângulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Considere o campo vectorial $f(x, y, z) = (x, y, z)$. Seja n a normal unitária a M com a componente segundo os z não-negativa. Calcule $\int_M f \cdot n$,

a) Usando a parametrização $g(u, v) = (u + v, u - v, 1 - 2u)$.

b) Usando uma parametrização da forma $z = f(x, y)$.

5 Seja S uma superfície em $\mathbb{R}^3$ parametrizada por $z = f(x, y)$, com $(x, y) \in T \subset \mathbb{R}^2$. Seja $\phi(x, y, z)$ um campo escalar definido em S. Mostre que

$$\int_S \phi = \int_T \phi(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + (\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2}\ dxdy.$$

6 Considere a superfície S em $\mathbb{R}^3$ que se obtem quando o cilindro definido por $x^2 + y^2 \leq 2x$ corta o cone

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}.$$

Calcule

$$\int_S (x^4 - y^4 + y^2z^2 - x^2z^2 + 1).$$

7 Calcule a área do parabolóide

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = (x - 2)^2 + (y - 1)^2,\ 0 \leq z < 4\}.$$

8 Calcule o fluxo do campo vectorial $f(x, y, z) = (x, -2x + y, z)$ através do hemisfério norte da esfera de raio 1 centrada na origem em $\mathbb{R}^3$, segundo uma orientação escolhida por si.

9 Calcule o fluxo do campo vectorial $f(x, y, z) = (x, y, \mathrm{arctg}(x^2 + y^2)$ através do cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2, \ -1 < z < 1\}$, no sentido da normal exterior.

10 Calcule a área do elipsóide

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}.$$

11 Calcule o momento de inércia do elipsóide E do problema anterior em relação ao eixo dos x.

12 Calcule a área da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^3 + y^3, \ 0 < x^2 + y^2 < 1\}.$$

13 Escreva uma expressão para a área da superfície (não precisa de calcular o integral)

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \mathrm{sen}(x)\mathrm{sen}(y), \ 0 < x, y < \pi\}.$$

14 Calcule a área da superfície

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y(x^2 + z^2) = 1, \ 1 < (x^2 + z^2) < 2\}.$$

15 Considere a variedade-3 em $\mathbb{R}^4$ definida pela esfera-3,

$$N = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}.$$

Calcule o volume-3 de N.

Sugestão: Use a parametrização $w = +\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ com $0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ para um dos hemisférios de N.