

Análise Matemática III

1º Teste - 11 de Novembro de 2000 - 11h00

Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 \geq 4, x, y, z \geq 0\}.$$

- (3) a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma
- $$\int \left(\int \left(\int dx \right) dy \right) dz.$$
- (3) b) Calcule a massa de um sólido com a forma de V e densidade de massa igual a z .

(3) 2. Considere a região $U \subset \mathbb{R}^2$ definida por

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x + y < 1, 2y + 1 < x < 2y + 2\}.$$

Calcule o integral duplo

$$\int_U \cos(x + y)e^{2y-x} dx dy,$$

utilizando uma mudança de coordenadas apropriada. Justifique detalhadamente a resposta.

3. Considere o campo vectorial $f(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2-4}, \frac{2y}{x^2+y^2-4}\right)$ definido em $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 4\}$.

- (2) a) Verifique se f é ou não um campo fechado em S .
- (3) b) Será f um gradiente no conjunto $x^2 + y^2 > 4$? Justifique.
- (2.5) c) Calcule o trabalho de f ao longo do segmento de recta que une o ponto $(0, 4)$ ao ponto $(4, 0)$.

(3.5) 4. Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto, $R \subset U$ uma região limitada por uma curva regular simples $C \subset U$, e

$$G: U \rightarrow \mathbb{R}^2$$

uma aplicação de classe C^2 , injectiva, tal que $\det DG > 0$. Use o teorema de Green para demonstrar o seguinte caso particular da fórmula de mudança de coordenadas

$$\int \int_{G(R)} dx dy = \int \int_R \det DG du dv.$$

Justifique cuidadosamente a resposta.

Sugestão: Seja $G(u, v) = (f(u, v), g(u, v))$. Comece por mostrar que o trabalho do campo vectorial $a(x, y) = (y, 0)$ ao longo de $G(C)$ é igual ao trabalho do campo vectorial $b(u, v) = \left(g \frac{\partial f}{\partial u}, g \frac{\partial f}{\partial v}\right)$ ao longo de C .