

### Análise Matemática III

1º Exame/2º teste - 16 de Janeiro de 2001 - 9h

1º exame: todos os grupos. Duração: 3h

2º teste: grupos 5, 6 e 7. Duração: 1h30m

**Apresente e justifique todos os cálculos**

- (4 val.) 1. (a) Considere o sólido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x < 2, e^x < y < e^{3x}, 0 < z < 1\}.$$

Escreva uma expressão para o volume de  $V$  em termos de integrais iterados das formas  $\int \dots \int \dots \int \dots \dots dydx dz$  e  $\int \dots \int \dots \int \dots \dots dx dy dz$ .

- (b) Calcule a massa do sólido

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < \sqrt{x^2 + y^2} < 3, 0 < z < x^2 + y^2, z < (4 - \sqrt{x^2 + y^2})^2\},$$

sabendo que a função densidade de massa é constante igual a 1.

- (2 val.) 2. Considere a região  $U \subset \mathbb{R}^2$  definida por

$$U = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 < x^3 + 2y < -1, 0 < \frac{x^3}{3} + y < 1 \right\}.$$

Calcule o integral duplo

$$\iint_U \frac{x^2(x^3 + 2y)}{(1 + (\frac{x^3}{3} + y)^2)} dx dy,$$

usando uma mudança de coordenadas apropriada. Justifique detalhadamente a resposta.

- (2 val.) 3. Determine quais dos seguintes campos vectoriais são gradientes no seu domínio de definição. Justifique detalhadamente a resposta.

(a)  $\mathbf{f}(x, y) = \left( \frac{1}{y^2 + 1}, \frac{1}{x^2 + 1} \right);$

(b)  $\mathbf{g}(x, y, z) = \left( \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} + 2e^{2x+y^2}, \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} + 2ye^{2x+y^2}, \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \right).$

- (2 val.) 4. Seja  $f(x) = \log x$  definida em  $I = ]0, 1[$ . Mostre que  $f$  é integrável em  $I$  e calcule  $\int_I f(x) dx$ . Nota: a primitiva de  $\log x$  é  $x \log x - x$ .

(3 val.) **5.** Considere a variedade

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2xy, x^2 + y^2 < 1\}.$$

- (a) Calcule a área de  $M$ . *Sugestão: comece por escrever uma parametrização para  $M$  usando  $x$  e  $y$  como parâmetros.*
- (b) Determine os pontos de  $M$  em que o plano tangente a  $M$  é horizontal.

(5 val.) **6.** Considere a superfície

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2} - 1, 0 < z < 1\}.$$

- (a) Calcule o fluxo de  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + \cos(yz), y + e^{x^2+z^2}, z + 1)$  através da superfície  $C$ , no sentido da normal unitária cuja terceira componente é negativa.
- (b) Usando o teorema de Stokes, calcule o fluxo do campo vectorial  $\mathbf{G}(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$  através de  $C$ , no sentido da normal unitária cuja terceira componente é negativa.

(2 val.) **7.** Seja  $M$  uma variedade compacta de dimensão 2 em  $\mathbb{R}^3$  que não contém a origem. Justifique que existe pelo menos um ponto  $p$  de  $M$  que minimiza a distância à origem. Mostre que a recta que une  $p$  à origem é perpendicular a  $M$  em  $p$ .