Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

Resolução do 1º exame/2ºteste - 16 de Janeiro de 2001 - 9h

1. (a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(V) &= \int_0^1 \int_1^2 \int_{e^x}^{e^{2x}} 1dydxdz \\
&= \int_0^1 \int_e^{e^2} \int_1^{\log y} 1dxdydz + \int_0^1 \int_{e^2}^{e^3} \int_1^2 1dxdydz + \int_2^1 \int_{e^3}^{e^6} \int_{\frac{1}{3}\log y}^2 1dxdydz.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
M &= \int_1^2 \int_0^{\rho^2} \int_0^{2\pi} 1\cdot \rho d\theta dz d\rho + \int_2^3 \int_0^{(4-\rho)^2} \int_0^{2\pi} 1\cdot \rho d\theta dz d\rho \\
&= 2\pi \int_1^2 \rho^3 d\rho + 2\pi \int_2^3 \rho(4-\rho)^2 d\rho = \frac{56\pi}{3}.
\end{aligned}$$

2. A função $g : U \to (-2,-1)\times(0,1)$ definida por $g(x,y) = (x^3+2y, \frac{x^3}{3}+y)$ é uma mudança de coordenadas em U: efectivamente, g é de classe C^∞, é injectiva (porque é a composição das bijecções $(x,y)\mapsto(x+2y,\frac{x}{3})$ e $(x,y)\mapsto(x^3,y)$), e tem Jacobiano

$$\det\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 3x^2 & 2 \\ x^2 & 1 \end{vmatrix} = x^2,$$

o qual não se anula em U (é fácil ver que U não intersecta o eixo dos yy: para um ponto da forma $(0,y)$ pertencer a U, y teria que satisfazer simultaneamente $-2<y<-1$ e $0<y<1$). Em particular a função inversa $g^{-1} : (-2,-1)\times(0,1)\to U$ é também uma mudança de coordenadas com Jacobiano

$$\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left(\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^{-1} = \frac{1}{x^2}.$$

Portanto podemos aplicar fórmula da mudança de coordenadas:

$$\begin{aligned}
\iint_U \frac{x^2(x^3+2y)}{(1+(\frac{x^3}{3}+y)^2)}dxdy &= \int_{-2}^{-1}\int_0^1 \frac{x^2u}{1+v^2}\cdot\frac{1}{x^2}dvdu \\
&= \left[\frac{u^2}{2}\right]_{-2}^{-1}\left[\operatorname{arctg} v\right]_0^1 = -\frac{3\pi}{8}.
\end{aligned}$$

3. (a) Como

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

é diferente de

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{2y}{(y^2+1)^2}$$

concluímos que $\mathbf{f}$ nem sequer é fechado, e portanto não pode ser gradiente.

(b) Calculando as derivadas cruzadas pode ver-se que $\mathbf{g}$ é fechado; no entanto, como o seu domínio de definição é o conjunto

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2>1\},$$

que não é um conjunto simplesmente conexo, não podemos para já concluir nada.
O campo $\mathbf{g}$ será gradiente se conseguirmos um potencial ϕ satisfazendo

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial x} &= \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2-1}} + 2e^{2x+y^2} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} &= \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2-1}} + 2ye^{2x+y^2} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} &= \sqrt{x^2+y^2-1} \end{cases} ;$$

Integrando cada uma das equações do sistema obtemos

$$\begin{cases} \phi &= z\sqrt{x^2+y^2-1} + e^{2x+y^2} + \alpha(y,z) \\ \phi &= z\sqrt{x^2+y^2-1} + e^{2x+y^2} + \beta(x,z) \\ \phi &= z\sqrt{x^2+y^2-1} + \gamma(x,y) \end{cases} ;$$

Portanto um potencial para $\mathbf{g}$ é por exemplo $\phi(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2-1} + e^{2x+y^2}$, e $\mathbf{g}$ é então um gradiente.

4. Apesar da função f ser contínua em I, não é limitada e portanto não podemos para já concluir nada acerca da sua integrabilidade.

Considere-se a sucessão de funções

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in]0, \frac{1}{n}[\\ \log x & \text{se} \quad x \in]\frac{1}{n}, 1[\end{cases} .$$

A função f_n é integrável em I, porque é contínua e limitada (logo integrável) em $]0, \frac{1}{n}]$ e em $[\frac{1}{n}, 1[$. Por outro lado, uma vez que $\log x < 0$ para $x \in I$, trata-se de uma sucessão *decrescente.* Como

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

o teorema da convergência monótona garante-nos que f será integrável *sse* for finito o limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 \log x dx = \lim_{n\to+\infty} \Big[x\log x - x\Big]_{\frac{1}{n}}^1 == \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\log n}{n} - 1 + \frac{1}{n}\right).$$

Como

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0,$$

concluímos do teorema convergência monótona que f é integrável em I e que

$$\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = -1.$$

5. (a) Uma parametrização natural de M é $\mathbf{g}(x,y) = (x, y, 2xy)$, definida em $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$. O elemento de área é a norma do vector

$$\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 & 2y \\ 0 & 1 & 2x \end{vmatrix} = (-2y, -2x, 1)$$

e portanto a área de M é dada por

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_2(M) &= \iint_{\{x^2+y^2<1\}} \sqrt{4y^2+4x^2+1}\,dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{4\rho^2+1}\,\rho d\theta d\rho \\
&= 2\pi \left[\frac{\left(4\rho^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{8\cdot\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(5^{\frac{3}{2}}-1\right).
\end{aligned}$$

(b) M é definida no conjunto aberto $\{(x,y)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2<1\}$ pela equação $F(x,y,z)=0$, onde $F(x,y,z)=2xy-z$. Como $\nabla F=(2y,2x,-1)$ não se anula nunca, este vector forma uma base para o espaço normal a M. A condição do plano tangente ser horizontal é obviamente equivalente à condição do espaço normal ser vertical, i.e., de as duas primeiras componentes de ∇F serem nulas. Logo os pontos pedidos têm que satisfazer $2x=2y=0$ e $z=xy=0$. O único em que o plano tangente a M é horizontal é portanto a origem.

6. (a) Apesar do campo $\mathbf{F}$ ser algo complicado, é fácil ver que $\mathrm{div}\,F=3$. Portanto será conveniente usar o teorema da divergência.
A superfície C é um pedaço de um cone cujo eixo é o eixo dos zz, e o seu bordo é constituido por uma circunferência C_1 de raio 1 contida no plano $z=0$ e uma circunferência C_2 de raio 2 contida no plano $z=1$. Para aplicar o teorema da divergência (que só pode ser aplicado a superfícies que limitam volumes), adicionamos a C os dois círculos D_1 e D_2 contidos nos planos $z=0$ e $z=1$ e cujos bordos são C_1 e C_2. A normal unitária indicada corresponde então à normal unitária exterior $\mathbf{n}$ ao volume V limitado por $D_1\cup C\cup D_2$. Note-se que, em D_1, $\mathbf{n}=(0,0,-1)$ e, em D_2, $\mathbf{n}=(0,0,1)$. Por outro lado, $\mathbf{F}(x,y,0)=(x+1,y+e^{x^2},1)$ e $\mathbf{F}(x,y,1)=(x+\cos y,y+e^{x^2+1},2)$. Pelo teorema da divergência tem-se então

$$\begin{aligned}
\iint_{D_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} &+ \iint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}+\iint_{D_2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=\iiint_V \mathrm{div}\,\mathbf{F} \\
&\Leftrightarrow \iint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=\iiint_V 3-\iint_{D_1}(-1)-\iint_{D_2}2 \\
&= 3\,\mathrm{vol}(V)+\mathrm{vol}_2(D_1)-2\,\mathrm{vol}_2(D_2).
\end{aligned}$$

Como D_1 e D_2 são círculos de raios 1 e 2, $\mathrm{vol}_2(D_1)=\pi$ e $\mathrm{vol}_2(D_2)=4\pi$. Por outro lado,

$$\mathrm{vol}(V)=\int_0^1\int_0^{z+1}\int_0^{2\pi}\rho d\theta d\rho dz=2\pi\int_0^1\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{z+1}dz=\frac{7\pi}{3}.$$

Logo,

$$\iint_{D_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=3\cdot\frac{7\pi}{3}+\pi-2\cdot 4\pi=0.$$

(b) Note-se que $\mathrm{div}\,\mathbf{G}=0$. Como $\mathbf{G}$ está definido em $\mathbb{R}^3$, que é um conjunto em estrela, concluimos que $\mathbf{G}$ é um campo rotacional. Se $\mathbf{A}$ é um potencial vector para $\mathbf{G}$, i.e., se $\mathbf{G}=\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$, então devemos ter

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z} &=& y+z \\
\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x} &=& x+z \\
\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y} &=& x+y
\end{array}\right. ;$$

Como é sabido, o facto de o potencial vector estar definido a menos de um gradiente permite-nos sempre assumir que uma das componentes deste se anula. Escolhemos por exemplo $A_2 = 0$. Então obtém-se

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} & = & y+z \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} & = & x+z \\ \frac{\partial A_1}{\partial y} & = & -x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_3 & = & \frac{y^2}{2} + zy + f(x,z) \\ \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x} & = & x+z \\ A_1 & = & -xy - \frac{y^2}{2} + g(x,z) \end{cases}$$

Portanto podemos por exemplo escolher $f(x,z) = 0$ e $g(x,z) = xz + \frac{z^2}{2}$. Um potencial vector para $\mathbf{G}$ é então

$$\mathbf{A} = (xz + \frac{z^2}{2} - xy - \frac{y^2}{2}, 0, \frac{y^2}{2} + zy).$$

Pelo teorema de Stokes,

$$\iint_C \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} = \oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g} + \oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g}$$

onde as orientações de C_1 e C_2 devem ser compatíveis com a normal unitária $\mathbf{n}$. Mais precisamente, C_1 deve ser percorrida no sentido directo quando vista do semieixo positivo dos zz, e C_2 no sentido inverso. Uma parametrização para C_1 é então $\mathbf{g}(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$, e portanto

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g} &= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}, 0, \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}) \cdot (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^3\theta \right) d\theta = 0. \end{aligned}$$

Uma parametrização para C_2 é $\mathbf{g}(\theta) = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, 1)$; o sentido de C_2 correspondente a esta parametrização é no entanto o contrário áquele que pretendemos, pelo que

$$\begin{aligned} &\oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g} \\ = &-\int_0^{2\pi} (2\cos\theta + \frac{1}{2} - 2\operatorname{sen}^2\theta - 4\operatorname{sen}\theta\cos\theta, 0, 2\operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta) \cdot (-2\operatorname{sen}\theta, 2\cos\theta, 0) d\theta \\ = &-\int_0^{2\pi} \left(-4\cos\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta + 4\operatorname{sen}^3\theta + 8\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta \right) d\theta = 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$\iint_C \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

7. A distância à origem é a função contínua $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, e portanto tem máximo e mínimo no conjunto compacto M. Seja p um ponto de mínimo, e suponhamos que M é dada pela equação $F(x,y,z) = 0$ numa vizinhança de p. Então pelo teorema dos extremos condicionados tem-se $\nabla f(p) = \lambda \nabla F(p)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Como

$$\nabla f = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}),$$

concluímos que as coordenadas (x, y, z) do ponto p satisfazem $(x, y, z) = \mu \nabla F(p)$ para algum $\mu \in \mathbb{R}$ diferente de zero (porque M não contém a origem). Como $\nabla F(p)$ gera o espaço normal a M em p, concluimos que a recta que une p à origem é perpendicular a M em p.