Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

1º Semestre 2000/2001

2º Exame - Todos os cursos

22 de Fevereiro de 2001

Duração: 3 horas.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Um pião de densidade constante igual a 1 é descrito pelo conjunto

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}.$$

Calcule

(2 val.) a) A massa do pião.

(1 val.) b) O momento de inércia do pião em relação ao eixo dos zz.

(2 val.) **2.** Considere a região $S \subset \mathbb{R}^2$ definida por

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -3 < y - e^x < -2,\ 0 < y + 2e^x < \pi\right\}.$$

Calcule o integral

$$\iint_S e^x \operatorname{sen}(2e^x + y)\, dx dy.$$

(2 val.) **3.** Considere o campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (e^{x^2}, e^{y^2}).$$

Será $\mathbf{F}$ um gradiente? Justifique cuidadosamente a sua resposta.

(2 val.) **4.** Considere a variedade

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = (x + y)^2 + (x - y)^2,\ x^2 + y^2 < 4\right\}.$$

Calcule a área de M.

Volte S. F. F.

(2.5 val.) **5.** Calcule

$$\iiint_C \operatorname{div} \mathbf{G}\, dxdydz$$

onde C é o cubo

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ 0 < z < 1\right\}$$

e $\mathbf{G}$ é o campo vectorial definido por

$$\mathbf{G}(x,y,z) = (x(x-1)e^{y^2}, y(y-1)e^{z^2}, z(z-1)e^{x^2}).$$

(2.5 val.) **6.** Calcule o fluxo de $\operatorname{rot} \mathbf{H}$ através do quarto de toro

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2+y^2} - 2\right)^2 + z^2 = 1,\ x > 0,\ y > 0\right\},$$

segundo a normal exterior ao toro, onde

$$\mathbf{H}(x,y,z) = (xye^{z^2}, 0, x+y).$$

(2.5 val.) **7.** Determine os pontos da curva $C \subset \mathbb{R}^2$ definida pela equação $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$ que minimizam a função$f(x,y) = x - y$.

8. Determine se as seguintes funções são integráveis no domínio indicado, e em caso afirmativo, calcule o respectivo integral.

(1.5 val.) a) $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$ em $[0,1[$;

(2 val.) b) $g(x,y,z) = \dfrac{e^{-x^2-y^2-z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.