

Resolução Sumária da 2ª Ficha de Exercícios de AMIII

29 de Outubro de 2001

1. Mostre que os seguintes conjuntos são variedades e indique a respectiva dimensão:

(a) $\{(x, y, z) \in E^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$;

Resolução: O conjunto é $F^{-1}(0)$, onde

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1.$$

Uma vez que

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & -2z \end{bmatrix}$$

só não tem característica máxima (i.e., 1) no ponto $(0, 0, 0)$, que não pertence a $F^{-1}(0)$ (porque $F(0, 0, 0) = -1$), vemos que cada ponto de $F^{-1}(0)$ possui uma vizinhança na qual a característica de DF é máxima. Portanto $F^{-1}(0)$ é uma variedade de dimensão $3 - 1 = 2$.

(b) $\{(x, y, z) \in E^3 : x^2 + y^2 = x + y + z = 1\}$;

Resolução: O conjunto é $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{0})$, onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2 - 1, x + y + z - 1).$$

Uma vez que

$$D\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

só não tem característica máxima (i.e., 2) quando $x = y = 0$, e visto que os pontos desta forma não pertencem a $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{0})$ (porque $\mathbf{F}(0, 0, z) = (-1, z + 1)$), vemos que cada ponto de $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{0})$ possui uma vizinhança na qual a característica de $D\mathbf{F}$ é máxima. Portanto $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{0})$ é uma variedade de dimensão $3 - 2 = 1$.

(c) $\{(x, y, z, w) \in E^4 : z = e^{x^2+y^2}, w = \cos(xy)\}$.

Resolução: Basta notar que este conjunto é o gráfico da função $C^\infty f : E^2 \rightarrow E^2$ dada por

$$f(x, y) = \left(e^{x^2+y^2}, \cos(xy) \right).$$

Portanto o conjunto é uma variedade de dimensão 2.

2. Calcule o espaço tangente e o espaço normal a cada uma das variedades seguintes nos pontos indicados:

- (a) $\{(x, y, z) \in E^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$, em $(1, 0, 0)$;

Resolução: Olhando para a linha da matriz Jacobiana da função F calculada no exercício anterior, sabemos que o espaço normal será dado por

$$T_{(1,0,0)}^\perp M = \text{span}\{(2, 0, 0)\} = \text{span}\{(1, 0, 0)\},$$

onde M designa a variedade. Logo

$$T_{(1,0,0)} M = \text{span}\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

- (b) $\{(x, y, z) \in E^3 : x^2 + y^2 = x + y + z = 1\}$, em $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \sqrt{2})$;

Resolução: Olhando para as linhas da matriz Jacobiana da função F calculada no exercício anterior, sabemos que o espaço normal será dado por

$$T_{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1-\sqrt{2})}^\perp M = \text{span}\{(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0), (1, 1, 1)\} = \text{span}\{(1, 1, 0), (1, 1, 1)\},$$

onde M designa a variedade. Logo

$$\begin{aligned} T_{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1-\sqrt{2})} M &= \{(a, b, c) \in E^3 : a + b = a + b + c = 0\} = \\ &= \{(a, -a, 0) : a \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(1, -1, 0)\}. \end{aligned}$$

- (c) $\{(x, y, z, w) \in E^4 : z = e^{x^2+y^2}, w = \cos(xy)\}$, em $(0, 0, 1, 1)$.

Resolução: Podemos escrever o conjunto como $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{0})$, onde

$$\mathbf{F}(x, y, z, w) = (z - e^{x^2+y^2}, w - \cos(xy)).$$

Uma vez que

$$D\mathbf{F}(x, y, z, w) = \begin{bmatrix} -2xe^{x^2+y^2} & -2ye^{x^2+y^2} & 1 & 0 \\ y \sin x & x \sin y & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

vemos que o espaço normal será dado por

$$T_{(0,0,1,1)}^\perp M = \text{span}\{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\},$$

onde M designa a variedade. Logo

$$T_{(0,0,1,1)} M = \text{span}\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\}.$$

3. Escreva a equação do plano ortogonal à curva

$$\{(x, y, z) \in E^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1, 3x + 4y - 5z = 0\}$$

no ponto $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0)$.

Resolução: A curva é dada por $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{0})$, onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z^2 - 1, 3x + 4y - 5z).$$

Uma vez que

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & -2z \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix},$$

o espaço normal será dado por

$$T_{\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0\right)}^\perp M = \text{span}\left\{\left(\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}, 0\right), (3, 4, -5)\right\} = \text{span}\{(4, -3, 0), (3, 4, -5)\},$$

onde M designa a curva. O espaço tangente será então dado por

$$\begin{aligned} T_{\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0\right)} M &= \{(a, b, c) \in E^3 : 4a - 3b = 3a + 4b - 5c = 0\} = \\ &= \left\{\left(a, \frac{4}{3}a, \frac{5}{3}a\right) : a \in \mathbb{R}\right\} = \text{span}\{(3, 4, 5)\}, \end{aligned}$$

e portanto o vector $(3, 4, 5)$ será ortogonal ao plano pedido. Consequentemente, a equação deste plano deverá ser

$$3x + 4y + 5z = d$$

para algum $d \in \mathbb{R}$. Uma vez que o ponto $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0\right)$ tem que satisfazer a equação do plano, concluímos que $d = 0$, e portanto a equação é

$$3x + 4y + 5z = 0.$$

4. Escreva 4 como uma soma de 4 números reais positivos cujo produto seja máximo.

Queremos maximizar a função

$$f(x, y, z, w) = xyzw$$

sob a restrição

$$x + y + z + w = 4.$$

De acordo com a regra dos multiplicadores de Lagrange, devemos procurar os pontos críticos da função

$$F(x, y, z, w) = xyzw + \lambda(x + y + z + w - 4).$$

Uma vez que

$$\nabla F = (yzw + \lambda, xzw + \lambda, xyw + \lambda, xyz + \lambda),$$

os possíveis pontos de máximo deverão satisfazer

$$\begin{cases} yzw + \lambda = 0 \\ xzw + \lambda = 0 \\ xyw + \lambda = 0 \\ xyz + \lambda = 0 \\ x + y + z + w = 4 \end{cases}$$

Se alguma das variáveis for zero, o produto será zero e portanto não será máximo; assumindo $xyzw \neq 0$, teremos $\lambda \neq 0$ e portanto dividindo as quatro primeiras equações membro a membro obtém-se $x = y = z = w$, e da última equação vem $x = y = z = w = 1$.

A região do hiperplano $x + y + z + w = 4$ na qual $x, y, z, w \geq 0$ é compacta. Portanto sabemos que o máximo da função f naquela região existe; logo, tem que ser o ponto $(1, 1, 1, 1)$.

5. Que dimensões deverá ter uma caixa rectangular de volume V , aberta numa das faces, por forma a que a área da sua superfície seja mínima?

Resolução: Sejam $x, y, z > 0$ as dimensões da caixa. O volume da caixa será

$$V = xyz.$$

Supondo que a face aberta é a face de lados x, y , vemos que a área da caixa será

$$A(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz.$$

O problema é minimizar a função A sob a restrição $xyz = V$. De acordo com a regra dos multiplicadores de Lagrange, devemos procurar os pontos críticos da função

$$F(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - V).$$

Uma vez que

$$\nabla F = (y + 2z + \lambda yz, x + 2z + \lambda xz, 2x + 2y + \lambda xy),$$

os possíveis pontos de mínimo deverão satisfazer

$$\begin{cases} y + 2z + \lambda yz = 0 \\ x + 2z + \lambda xz = 0 \\ 2x + 2y + \lambda xy = 0 \\ xyz = V \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{z} + 2\frac{1}{y} + \lambda = 0 \\ \frac{1}{z} + 2\frac{1}{x} + \lambda = 0 \\ 2\frac{1}{y} + 2\frac{1}{x} + \lambda = 0 \\ xyz = V \end{cases}$$

e portanto $x = y = 2z$, donde $z = \left(\frac{V}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$. Por outras palavras, a caixa deverá ter base quadrada e altura igual a metade do lado do quadrado.

6. Determine o comprimento dos semieixos da elipse de equação $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$ (**Sugestão:** Recorde que os eixos de uma elipse se intersectam nos pontos em que a distância ao centro é máxima/mínima).

Resolução: De acordo com a sugestão, basta achar os extremos (do quadrado) da distância ao centro da elipse. Uma vez que a elipse é claramente simétrica em relação à origem (se (x, y) satisfaz a equação então $(-x, -y)$ também a satisfaz), devemos então encontrar os extremos da função

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

sob a restrição

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9.$$

De acordo com a regra dos multiplicadores de Lagrange, devemos procurar os pontos críticos da função

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9).$$

Uma vez que

$$\nabla F = (2x + 10\lambda x + 8\lambda y, 2y + 8\lambda x + 10\lambda y),$$

os possíveis pontos de extremo deverão satisfazer

$$\begin{cases} 2x + 10\lambda x + 8\lambda y = 0 \\ 2y + 8\lambda x + 10\lambda y = 0 \\ 5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9 \end{cases}$$

Claramente nem $(0, 0)$ não é uma possível solução, uma vez que não é um ponto da elipse; portanto a única forma de podermos ter

$$\begin{bmatrix} 1 + 5\lambda & 4 \\ 4 & 1 + 5\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é ser

$$\det \begin{bmatrix} 1 + 5\lambda & 4 \\ 4 & 1 + 5\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1 + 5\lambda)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow 1 + 5\lambda = \pm 4.$$

Portanto obtemos $x = \pm y$, e substituindo na equação da elipse vem

$$10x^2 \pm 8x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \text{ ou } x^2 = \frac{9}{2}$$

correspondendo às distâncias à origem

$$(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = (2x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 \text{ ou } 3.$$

Como a elipse é compacta e f contínua, f tem que possuir máximo e mínimo ao longo da elipse, e de acordo com o teorema acerca dos extremos condicionados tais pontos devem ser escolhidos de entre os pontos determinados acima. Como f só assume dois valores nesses pontos, um tem que ser o máximo e o outro o mínimo. Portanto os comprimentos dos semieixos da elipse são 1 e 3.

7. Calcule o máximo e o mínimo da função $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ na região $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$.

Resolução: Uma vez que a bola fechada $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ é compacta e f é contínua, f possui máximo e mínimo nesta região. Uma vez que

$$\nabla f(x, y, z) = (1, -2, 2) \neq \mathbf{0},$$

vemos que f não possui qualquer extremo local na bola aberta $x^2 + y^2 + z^2 < 9$, pelo que o máximo e o mínimo terão que estar na fronteira $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. De acordo com a regra dos multiplicadores de Lagrange, devemos procurar os pontos críticos da função

$$F(x, y, z) = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9).$$

Uma vez que

$$\nabla F = (1 + 2\lambda x, -2 + 2\lambda y, 2 + 2\lambda z),$$

os possíveis pontos de mínimo deverão satisfazer

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ -2 + 2\lambda y = 0 \\ 2 + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{\lambda} \\ z = -\frac{1}{\lambda} \\ \frac{9}{4\lambda^2} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mp 1 \\ y = \pm 2 \\ z = \mp 2 \\ \lambda = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$$

Portanto o máximo e o mínimo serão necessariamente os pontos $(1, -2, 2)$ e $(-1, 2, -2)$. (Isto aliás poderia ver-se imediatamente observando que a função f é simplesmente o produto interno com o vector fixo $(1, -2, 2)$).

8. Sejam A e B conjuntos mensuráveis limitados. Mostre que:

(a) $V(A \setminus B) = V(A) - V(A \cap B)$;

Resolução: Basta observar que A pode ser decomposto nos dois conjuntos mensuráveis disjuntos

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B).$$

Por aditividade da medida de Lebesgue, segue-se que

$$V(A) = V(A \setminus B) + V(A \cap B).$$

(b) $V(A \cup B) = V(A) + V(B) - V(A \cap B)$;

Resolução: Novamente só é preciso observar que $A \cup B$ pode ser decomposto nos dois conjuntos mensuráveis disjuntos

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B$$

e que portanto por aditividade da medida de Lebesgue e usando a alínea anterior

$$V(A \cup B) = V(A \setminus B) + V(B) = V(A) - V(A \cap B) + V(B).$$

9. Mostre que o conjunto $A = \{(x, y) \in E^2 : x = y\}$ tem medida nula.

Resolução: Começamos por mostrar que por exemplo o conjunto

$$A_0 = \{(x, y) \in E^2 : x = y, x \in [0, 1]\}$$

tem medida nula. É fácil ver que qualquer que seja o $n \in \mathbb{N}$ é possível cobrir A_0 com n quadrados de dimensões $\frac{1}{n} \times \frac{1}{n}$; consequentemente,

$$\bar{V}(A_0) \leq n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$, e portanto $\bar{V}(A_0) = 0$. Como a medida exterior é invariante por translacções, concluímos que $\bar{V}(A_n) = 0$ para qualquer $n \in \mathbb{Z}$, onde

$$A_n = \{(x, y) \in E^2 : x = y, x \in [n, n + 1]\} = (n, n) + A_0.$$

Uma vez que

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_n$$

vemos que

$$\bar{V}(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{V}(A_n) = 0.$$

10. Seja $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma enumeração dos números racionais contidos no intervalo $]0, 1[$. Dado $\varepsilon > 0$, considere os conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{n=1}^{+\infty}]q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n}[; \\ B &=]0, 1[\cap A; \\ C &= [0, 1] \setminus B. \end{aligned}$$

- (a) Mostre que B é um conjunto aberto contendo todos os racionais em $]0, 1[$.

Resolução: B é aberto porque é a união de intervalos abertos, e contém todos os racionais em $]0, 1[$ por construção.

- (b) Mostre que $V(B) \leq 2\varepsilon$.

Resolução: Tem-se

$$V(B) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} V\left(]q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n}[\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\varepsilon}{2^n} = 2\varepsilon.$$

- (c) Mostre que $\partial B \supset C$, onde ∂B designa a fronteira de B .

Resolução: Basta notar que qualquer vizinhança de qualquer ponto de C contém pontos que não estão em B (ele próprio, por exemplo) e pontos que estão em B (porque qualquer vizinhança contém pontos racionais e B contém todos os racionais de $]0, 1[$).

- (d) Conclua que para ε suficientemente pequeno o conjunto B é um conjunto aberto cuja fronteira tem medida positiva.

Resolução: Basta notar que

$$V(\partial B) \geq V(C) = V([0, 1]) - V(B) = 1 - 2\varepsilon.$$