

Resumos de AMIII

25 de Novembro de 2002

I. Variedades em \mathbb{R}^n

1. Revisões de Cálculo Diferencial

1. *Notação:* E^n designa \mathbb{R}^n com o produto interno usual, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ a base canónica e x^1, \dots, x^n as funções coordenadas.
2. Se $U \subset E^n$ é aberto, $\mathbf{f} : U \rightarrow E^m$ uma função (portanto $\mathbf{f} = (f^1, \dots, f^m)$), $\mathbf{x}_0 \in U$ e $\mathbf{v} \in E^n$ então a *derivada direccional* de \mathbf{f} segundo \mathbf{v} no ponto \mathbf{x}_0 é

$$D_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{t} = \frac{d}{dt}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})|_{t=0}.$$

3. A i -ésima *derivada parcial* de \mathbf{f} é

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x^i} \equiv \mathbf{f}_i \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^i} \\ \dots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^i} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} f_i^1 \\ \dots \\ f_i^m \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} D_{\mathbf{e}_i}\mathbf{f}.$$

4. \mathbf{f} diz-se *diferenciável* em \mathbf{x}_0 se existe uma transformação linear $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) : E^n \rightarrow E^m$ (representada por uma matriz $m \times n$) tal que

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0}.$$

5. Se \mathbf{f} é diferenciável em \mathbf{x}_0 então

$$D_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}.$$

Em particular, $D\mathbf{f}$ é representada na base canónica pela *matriz Jacobiana*

$$D\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 & \dots & f_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1^m & \dots & f_n^m \end{bmatrix}.$$

6. \mathbf{f} diz-se de classe C^1 se as derivadas parciais $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) são funções contínuas.
7. $\mathbf{f} \in C^1 \Rightarrow \mathbf{f}$ diferenciável.

8. Se $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow E^n$ é diferenciável, $\mathbf{f}(t) = (f^1(t), \dots, f^n(t))$, então \mathbf{f} parametriza uma curva em E^n , e

$$D\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{df^1}{dt} \\ \dots \\ \frac{df^n}{dt} \end{bmatrix} \equiv \frac{d\mathbf{f}}{dt}$$

é um vector tangente à curva.

9. Se $f : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável, então f diz-se um *campo escalar*, e

$$D\mathbf{f} = \left[\frac{\partial f}{\partial x^1} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x^n} \right]$$

pode ser identificada com o vector

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right),$$

dito o *gradiente* de f .

10. O gradiente de um campo escalar é ortogonal aos conjuntos de nível do campo.
 11. Se $\mathbf{f} : U \subset E^n \rightarrow V \subset E^m$ é diferenciável em $\mathbf{x}_0 \in U$, e $\mathbf{g} : V \subset E^m \rightarrow E^p$ é diferenciável em $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, então $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : U \subset E^n \rightarrow E^p$ é diferenciável em \mathbf{x}_0 e

$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

Em coordenadas (x^1, \dots, x^n) em E^n e (y^1, \dots, y^m) em E^m , tem-se

$$\frac{\partial g^i}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g^i}{\partial y^k} \frac{\partial f^k}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^m g_k^i f_j^k$$

(*regra da cadeia*).

12. Derivadas parciais de ordem superior:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right) = f_{ji}.$$

f diz-se de classe C^2 se todas as derivadas parciais de segunda ordem são funções contínuas.

13. *Lema de Schwarz*: $f \in C^2 \Rightarrow f_{ij} = f_{ji}$.

2. Função Inversa e Função Implícita

1. O *jacobiano* da função diferenciável $\mathbf{f} : E^n \rightarrow E^n$ é o campo escalar

$$J\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \det D\mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

2. *Teorema da Função Inversa*: Seja $\mathbf{f} : U \subset E^n \rightarrow E^n$ uma função de classe C^1 e $\mathbf{x}_0 \in U$ tal que $J\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \neq 0$. Então \mathbf{f} é *localmente C^1 -invertível*, i.e., existem abertos $V \ni \mathbf{x}_0$ e $W \ni \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ tais que $\mathbf{f} : V \rightarrow W$ possui inversa C^1 $\mathbf{f}^{-1} : W \rightarrow V$. Além disso, $D\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = [D\mathbf{f}(\mathbf{x})]^{-1} \quad \forall \mathbf{x} \in V$.

3. *Teorema da Função Implícita:* Seja $\mathbf{F} : E^{n+m} \rightarrow E^m$ uma função de classe C^1 e $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in E^{n+m}$ tal que $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$ e $\det \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0$. Então existe uma vizinhança $U \times V \ni (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ e uma função de classe C^1 $\mathbf{f} : U \subset E^n \rightarrow V \subset E^m$ tais que

$$\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V : \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}\} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V : \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\}.$$

4. Nas condições do Teorema da Função Implícita, a matriz Jacobiana de \mathbf{f} em \mathbf{x}_0 pode ser calculada a partir de

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \cdot D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

3. Variedades Diferenciáveis

- Um conjunto $M \subset E^n$ é uma *variedade diferenciável de dimensão* $m \in \{0, \dots, n\}$ (e classe C^q , $q \geq 1$) se para qualquer ponto $\mathbf{x}_0 \in M$ existe uma vizinhança $U \ni \mathbf{x}_0$ e uma função de classe C^q $\mathbf{F} : U \rightarrow E^{n-m}$ tais que
 - $M \cap U = \{\mathbf{x} \in U : \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$;
 - $\text{rank } D\mathbf{F}(\mathbf{x}) = n - m$ (i.e., é máximo) para todo o $\mathbf{x} \in U$.
- Uma variedade de dimensão 0 é simplesmente um conjunto de pontos isolados; uma variedade de dimensão n é simplesmente um conjunto aberto.
- $M \subset E^n$ é uma variedade de dimensão m (e classe C^q) sse para qualquer ponto $\mathbf{x}_0 \in M$ existe uma vizinhança $U \ni \mathbf{x}_0$ e uma função C^q $\mathbf{f} : E^m \rightarrow E^{m-n}$ tais que

$$M \cap U = \text{Graf}(\mathbf{f}) \cap U.$$

- Um vector $\mathbf{v} \in E^n$ é um *vector tangente* à variedade M no ponto \mathbf{x}_0 se existe uma função $\mathbf{g} :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ tal que $\mathbf{g}(0) = \mathbf{x}_0$ e $\frac{d\mathbf{g}}{dt}(0) = \mathbf{v}$.
- O conjunto $T_{\mathbf{x}_0}M$ de todos os vectores tangentes à variedade M em \mathbf{x}_0 é um espaço vectorial de dimensão m , dito o *espaço tangente* a M no ponto \mathbf{x}_0 . O seu complemento ortogonal $T_{\mathbf{x}_0}^\perp M$ é um espaço vectorial de dimensão $n - m$, dito o *espaço normal* a M no ponto \mathbf{x}_0 .
- Se $M = \{\mathbf{x} \in U : \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ numa vizinhança $U \ni \mathbf{x}_0$ então

$$T_{\mathbf{x}_0}^\perp M = \text{span}\{\nabla F^1(\mathbf{x}_0), \dots, \nabla F^m(\mathbf{x}_0)\}.$$

- Teorema dos Extremos Condicionados:* Sejam $f : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $M \subset E^n$ uma variedade m -dimensional. Se a restrição de f a M tem um extremo local em $\mathbf{x}_0 \in M$ então $\nabla f(\mathbf{x}_0) \in T_{\mathbf{x}_0}^\perp M$.
- Regra dos Multiplicadores de Lagrange:* Nas condições do teorema anterior, existem constantes $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-m} \in \mathbb{R}$ (os *multiplicadores de Lagrange*) tais que

$$\nabla(f + \lambda_1 F^1 + \dots + \lambda_{n-m} F^{n-m})(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

II. Integração em \mathbb{R}^n

1. Medida de Lebesgue

1. Um *intervalo limitado* $I \subset E^n$ é um conjunto da forma $I = J_1 \times \dots \times J_n$, onde cada J_k é um intervalo de extremos $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Define-se a *medida* (n-dimensional) de um intervalo limitado através de

$$V_n(I) = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k).$$

2. Um *conjunto elementar limitado* $E \subset E^n$ é uma união finita de intervalos limitados disjuntos,

$$E = \bigcup_{k=1}^N I_k.$$

Define-se a *medida* (n-dimensional) de um conjunto elementar limitado através de

$$V_n(E) = \sum_{k=1}^N V_n(I_k).$$

3. Dado um subconjunto qualquer $A \subset E^n$, define-se a sua *medida exterior* (n-dimensional) como sendo

$$\bar{V}_n(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} V_n(I_k) : I_k \text{ intervalo limitado, } A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k \right\}$$

(pode ser $+\infty$).

4. Propriedades da medida exterior:

- i. $\bar{V}_n(\emptyset) = 0$;
- ii. $A \subset B \Rightarrow \bar{V}_n(A) \leq \bar{V}_n(B)$;
- iii. E elementar limitado $\Rightarrow \bar{V}_n(E) = V(E)$;
- iv. $\bar{V}_n(\mathbf{a} + A) = \bar{V}_n(A) \forall \mathbf{a} \in E^n$;
- v. $A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \Rightarrow \bar{V}_n(A) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \bar{V}_n(A_k)$.

5. Uma família $\{U_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de E^n diz-se uma *cobertura* de $A \subset E^n$ se

$$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

A cobertura diz-se *aberta* se todos os U_i são abertos. Uma *subcobertura* é uma subfamília $\{U_i\}_{i \in J}$ ($J \subset I$) que é ainda uma cobertura de A .

6. *Teorema de Heine-Borel*: $K \subset E^n$ é *compacto* (i.e., limitado e fechado) sse toda a cobertura aberta de K admite uma subcobertura finita.
7. A *diferença simétrica* entre dois conjuntos A e B é

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

8. Um conjunto $A \subset E^n$ diz-se *mensurável com medida finita* se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists E \text{ elementar limitado} : \bar{V}_n(A \Delta E) < \varepsilon.$$

Se A é mensurável com medida finita, define-se a sua *medida* (n-dimensional) mediante $V_n(A) = \bar{V}_n(A) < +\infty$.

9. Uma família \mathcal{A} de subconjuntos de E^n diz-se uma *álgebra de conjuntos* se

- i. $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- ii. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \equiv E^n \setminus A \in \mathcal{A}$;
- iii. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

Uma álgebra \mathcal{A} diz-se uma σ -álgebra se

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A}.$$

10. $A \subset E^n$ diz-se *mensurável* se $A \cap [-L, L]^n$ é mensurável com medida finita $\forall L > 0$. Se A é mensurável define-se a sua *medida* (n -dimensional) como $V_n(A) = \bar{V}_n(A)$ (pode ser $+\infty$).
11. Seja \mathcal{M} a família dos subconjuntos mensuráveis de E^n . Então:
- i. \mathcal{M} é uma σ -álgebra;
 - ii. $V_n : \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$ é σ -aditiva, i.e., se $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$ são disjuntos 2 a 2 então

$$V_n\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} V_n(A_k).$$

12. Qualquer conjunto de medida exterior nula é mensurável. Qualquer conjunto aberto/fechado é mensurável.
13. Uma função $f : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se *mensurável* se $f^{-1}(I) \in \mathcal{M}$ para qualquer intervalo $I \subset \mathbb{R}$.
14. $f : E^n \rightarrow E^m$ é contínua sse para qualquer aberto $U \subset E^m$ a imagem inversa $f^{-1}(U) \subset E^n$ é um aberto.
15. Qualquer função contínua é mensurável.
16. Se $f : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ é um campo escalar, define-se

$$f^+(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{se } f(\mathbf{x}) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases}, \quad f^-(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(\mathbf{x}) \geq 0 \\ -f(\mathbf{x}) & \text{se } f(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases}$$

(note-se que $f^+, f^- \geq 0, f = f^+ - f^-, |f| = f^+ + f^-$).

17. i. f mensurável $\Rightarrow f^+, f^-$ mensuráveis.
 ii. f, g mensuráveis $\Rightarrow f \pm g, fg$ mensuráveis.
 iii. f_1, f_2, \dots mensuráveis e $f(\mathbf{x}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(\mathbf{x})$ existe $\Rightarrow f$ mensurável.
18. Se $A \subset E^n$, a *função característica* de A é a função $\chi_A : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\chi_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x} \in A \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \notin A \end{cases}.$$

19. A função $s : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se *simples* se existem conjuntos disjuntos $A_1, \dots, A_N \subset E^n$ e números reais $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R}$ tais que

$$s = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{A_i}.$$

s é mensurável sse $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{M}$.

20. Se $f : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ é um campo escalar, existe uma sucessão $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de funções simples tais que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in E^n.$$

Além disso:

- i. Se f é mensurável, as funções s_k podem ser escolhidas mensuráveis;
- ii. Se $f \geq 0$, podemos escolher $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ monótona crescente:

$$0 \leq s_1(\mathbf{x}) \leq s_2(\mathbf{x}) \leq \dots, \quad \forall \mathbf{x} \in E^n.$$

2. Integral de Lebesgue

1. Se $s : E^n \rightarrow [0, +\infty[$ é simples e mensurável,

$$s = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{A_i} \quad c_i \in \mathbb{R}^+, A_i \in \mathcal{M},$$

define-se o seu *integral* como sendo

$$\int_{E^n} s dV_n = \sum_{i=1}^N c_i V(A_i)$$

(pode ser $+\infty$).

2. Se $f : E^n \rightarrow [0, +\infty[$ é mensurável, define-se

$$\int_{E^n} f dV_n = \sup \left\{ \int_{E^n} s dV_n : 0 \leq s \leq f \text{ é simples e mensurável} \right\}$$

(pode ser $+\infty$). Se

$$\int_{E^n} f dV_n < +\infty$$

a função f diz-se *integrável*.

3. Uma função mensurável $f : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se *integrável* se f^+, f^- o são. Nesse caso, define-se

$$\int_{E^n} f dV_n = \int_{E^n} f^+ dV_n - \int_{E^n} f^- dV_n.$$

4. Se $A \in \mathcal{M}$, f diz-se *integrável em A* se $f \chi_A$ é integrável, caso em que se define

$$\int_A f dV_n = \int_{E^n} f \chi_A dV_n.$$

O conjunto das funções integráveis em A designa-se por $L^1(A)$.

5. Seja $A \in \mathcal{M}$. Então

- i. Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável e limitada e $V_n(A) < +\infty$ então $f \in L^1(A)$;
- ii. Se $f, g \in L^1(A)$ e $f \leq g$ então

$$\int_A f dV_n \leq \int_A g dV_n.$$

iii. Se $V_n(A) = 0$ então $\int_A f dV_n = 0$.

iv. Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in L^1(A)$ então $af + bg \in L^1(A)$ e

$$\int_A (af + bg) dV_n = a \int_A f dV_n + b \int_A g dV_n.$$

v. $f \in L^1(A)$ sse $|f| \in L^1(A)$, e

$$\left| \int_A f dV_n \right| \leq \int_A |f| dV_n.$$

6. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é Riemann-integrável então $f \in L^1([a, b])$ e

$$\int_{[a,b]} f dV_1 = \int_a^b f(x) dx.$$

3. Teorema de Fubini, Mudança de Variáveis e Aplicações

1. Se $P(\mathbf{x})$ é uma proposição que depende de $\mathbf{x} \in E^n$, dizemos que $P(\mathbf{x})$ é verdadeira quase em toda a parte (q.t.p.) se

$$V_n(\{\mathbf{x} \in E^n : P(\mathbf{x}) \text{ é falsa}\}) = 0.$$

2. *Teorema de Fubini:* Se $A \subset E^n$ e $B \subset E^n$ são intervalos quaisquer e $f \in L^1(A \times B)$ então:

i. A função $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in L^1(A)$ para quase todo o $\mathbf{y} \in B$;

ii. A função $\mathbf{y} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in L^1(B)$ para quase todo o $\mathbf{x} \in A$;

iii. A função $\mathbf{y} \mapsto \int_A f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} \in L^1(B)$;

iv. A função $\mathbf{x} \mapsto \int_B f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \in L^1(A)$;

v.

$$\int_{A \times B} f = \int_A \left[\int_B f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right] d\mathbf{x} = \int_B \left[\int_A f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} \right] d\mathbf{y}.$$

3. Se $A \in \mathcal{M}$ é limitado e é dada uma *função densidade de massa* $\rho \in L^1(A)$, define-se:

i. O *volume* n-dimensional de A :

$$V = V_n(A) = \int_A dV_n.$$

ii. A *massa* de A :

$$M = \int_A \rho dV_n.$$

iii. A coordenada k do *centro de massa* de A :

$$x_{CM}^k = \frac{1}{M} \int_A x^k \rho dV_n.$$

iv. A coordenada k do *centróide* de A :

$$x_C^k = \frac{1}{V} \int_A x^k dV_n.$$

v. O momento de inércia de A em relação a um determinado eixo:

$$I = \int_A d^2 \rho dV_n,$$

onde $d(\mathbf{x})$ é a distância do ponto \mathbf{x} ao eixo.

4. Seja $U \subset E^n$ aberto; $\mathbf{g} : U \rightarrow E^n$ diz-se uma *mudança de coordenadas* se é uma injeção C^1 com $\det D\mathbf{g}(\mathbf{x}) \neq 0 \forall \mathbf{x} \in U$ (em particular, \mathbf{g} tem inversa C^1).
5. *Teorema de Mudança de Variáveis:* Se $\mathbf{g} : U \subset E^n \rightarrow E^n$ é uma mudança de coordenadas e $f \in L^1(\mathbf{g}(U))$ então $f \circ \mathbf{g} \in L^1(U)$ e

$$\int_{\mathbf{g}(U)} f(\mathbf{x}) dV_n(\mathbf{x}) = \int_U f(\mathbf{g}(\mathbf{t})) |\det D\mathbf{g}(\mathbf{t})| dV_n(\mathbf{t}).$$

6. O *paralelepípedo* de lados $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in E^n$ é o conjunto fechado (portanto mensurável)

$$P(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \{\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1]\}.$$

As propriedades da medida de Lebesgue implicam que

$$V_n(P(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)) = |\det[\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n]|.$$

7. *Coordenadas Polares* em E^2 : São as coordenadas $(r, \theta) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ relacionadas com as coordenadas Cartesianas usuais (x, y) mediante a mudança de coordenadas

$$(x, y) = \mathbf{g}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

O Jacobiano desta transformação é

$$J\mathbf{g}(r, \theta) = r.$$

8. *Coordenadas Cilíndricas* em E^3 : São as coordenadas $(r, \theta, z) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ relacionadas com as coordenadas Cartesianas usuais (x, y, z) mediante a mudança de coordenadas

$$(x, y, z) = \mathbf{g}(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z).$$

O Jacobiano desta transformação é

$$J\mathbf{g}(r, \theta, z) = r.$$

9. *Coordenadas Esféricas* em E^3 : São as coordenadas $(r, \theta, \varphi) \in]0, +\infty[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ relacionadas com as coordenadas Cartesianas usuais (x, y, z) mediante a mudança de coordenadas

$$(x, y, z) = \mathbf{g}(r, \theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta).$$

O Jacobiano desta transformação é

$$J\mathbf{g}(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin \theta.$$

4. Teoremas de Convergência

1. σ -aditividade do integral: Sejam $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$ com $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$,

$$A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \text{ e } f \geq 0 \text{ mensurável. Então}$$

$$\int_A f dV_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{A_k} f dV_n.$$

2. Sejam $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$ com $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, $A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$ e $f \geq 0$ mensurável. Então

$$\int_A f dV_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{A_k} f dV_n.$$

3. $\frac{1}{x^\alpha} \in L^1([1, +\infty[)$ sse $\alpha > 1$.

4. $e^{-x^2} \in L^1(\mathbb{R})$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

5. $\frac{1}{x^\alpha} \in L^1(]0, 1])$ sse $\alpha < 1$.

6. *Teorema da Convergência Monótona de Levi:* Seja $A \in \mathcal{M}$ e $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções mensuráveis em A tais que

$$0 \leq f(\mathbf{x}) \leq f_2(\mathbf{x}) \leq \dots \quad \forall \mathbf{x} \in A.$$

Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in A$$

então

$$\int_A f(\mathbf{x}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_A f_k(\mathbf{x})$$

(pode ser $+\infty$).

7. *Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue:* Seja $A \in \mathcal{M}$ e $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções mensuráveis em A . Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in A$$

e existe $g \in L^1(A)$ tal que

$$|f_k(\mathbf{x})| \leq g(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in A$$

então $f \in L^1(A)$ e

$$\int_A f(\mathbf{x}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_A f_k(\mathbf{x}).$$

8. *Regra de Leibniz:* Seja $A \subset E^n$ mensurável e $f : A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(\mathbf{x}, y)$ é integrável em \mathbf{x} para todo o $y \in \mathbb{R}$ e diferenciável em y para quase todo o $\mathbf{x} \in A$. Se existe $g \in L^1(A)$ tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, y) \right| \leq g(\mathbf{x})$$

para y numa vizinhança de $y_0 \in \mathbb{R}$ então a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(y) = \int_A f(\mathbf{x}, y) dV_n(\mathbf{x})$$

é diferenciável em y_0 e

$$F'(y_0) = \int_A \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, y) dV_n(\mathbf{x}).$$

III. Formas Diferenciais

1. Covectores

1. O *dual* de E^n é

$$(E^n)^* = \{\omega : E^n \rightarrow \mathbb{R} : \omega \text{ é linear}\}.$$

Os elementos de $(E^n)^*$ dizem-se *1-covectores*.

2. $(E^n)^*$ é um espaço vectorial de dimensão n . Uma base para $(E^n)^*$ é

$$\{dx^1, \dots, dx^n\}$$

onde o 1-covector dx^i é definido por

$$dx^i(v^1 \mathbf{e}_1 + \dots + v^n \mathbf{e}_n) = v^i$$

(ou seja, $dx^i(\mathbf{e}_j) = 1$ se $i = j$ e 0 caso contrário).

3. Um *k-tensor* (covariante) é uma aplicação $T : (E^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$ multilinear, i.e., tal que

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i, \dots, \mathbf{v}_k) &= T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_k) + T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{w}_i, \dots, \mathbf{v}_k); \\ T(\mathbf{v}_1, \dots, \lambda \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_k) &= \lambda T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_k) \end{aligned}$$

($\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k \in E^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$). $T^k(E^n)$ designa o conjunto de todos os k-tensores em E^n .

4. Um k-tensor $\omega \in T^k(E^n)$ diz-se *alternante*, ou um *k-covector*, se

$$\omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_k) = -\omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_k)$$

($\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in E^n$, $i, j = 1, \dots, n$). $\Lambda^k(E^n)$ designa o conjunto de todos os k-covectores em E^n .

5. $T^k(E^n)$ é um espaço vectorial e $\Lambda^k(E^n)$ é um subespaço vectorial de $T^k(E^n)$.
6. Se $S \in T^k(E^n)$ e $T \in T^l(E^n)$, o seu *produto tensorial* $S \otimes T \in T^{k+l}(E^n)$ é dado por

$$S \otimes T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l) = S(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) T(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l)$$

($\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l \in E^n$).

7. *Propriedades do produto tensorial:* Se S, T, U são tensores e $\lambda \in \mathbb{R}$ então

- i. $(S + T) \otimes U = S \otimes U + T \otimes U$;
- ii. $S \otimes (T + U) = S \otimes T + S \otimes U$;
- iii. $(\lambda S) \otimes T = \lambda(S \otimes T) = S \otimes (\lambda T)$;
- iv. $S \otimes (T \otimes U) = (S \otimes T) \otimes U$;

- v. $S \otimes T \neq T \otimes S$.
8. $\dim(T^k(E^n)) = n^k$, e uma base é $\{dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}\}_{i_1, \dots, i_k=1}^n$.
9. Se $T \in T^k(E^n)$, define-se

$$\text{Alt}(T)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sgn}(\sigma) T(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma(k)})$$

10. *Propriedades de Alt:*

- i. Se $T \in T^k(E^n)$ então $\text{Alt}(T) \in \Lambda^k(E^n)$;
- ii. $\text{Alt} : T^k(E^n) \rightarrow \Lambda^k(E^n)$ é linear;
- iii. Se $\omega \in \Lambda^k(E^n)$ então $\text{Alt}(\omega) = \omega$.

(Por outras palavras, $\text{Alt} : T^k(E^n) \rightarrow \Lambda^k(E^n)$ é uma projecção).

11. Se ω é um k -covector e η é um l -covector, o seu *produto exterior* é o $(k+l)$ -covector

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta).$$

12. *Propriedades do produto exterior:* Se ω, η, α e β são covectores de graus apropriados então

- i. $\omega \wedge (\alpha + \beta) = \omega \wedge \alpha + \omega \wedge \beta$;
- ii. $\omega \wedge (c\eta) = c(\omega \wedge \eta)$ com $c \in \mathbb{R}$;
- iii. $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$ para $\omega \in \Lambda^k(E^n), \eta \in \Lambda^l(E^n)$;
- iv. $\omega \wedge (\alpha \wedge \beta) = (\omega \wedge \alpha) \wedge \beta$.

13. $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = k! \text{Alt}(dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k})$

14. $\dim \Lambda^k(E^n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, e uma base é $\{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$.

2. Formas diferenciais

1. Uma k -forma diferencial C^q em E^n é uma função C^q $\omega : E^n \rightarrow \Lambda^k(E^n)$ (i.e., $\omega(\mathbf{x}) \in \Lambda^k(E^n)$ para todo o $\mathbf{x} \in E^n$). O conjunto das k -formas C^∞ em E^n designa-se por $\Omega^k(E^n)$.
2. Se $\mathbf{f} : E^n \rightarrow E^m$ é C^∞ e $\omega \in \Omega^k(E^m)$ então o *pull-back* de ω por \mathbf{f} é a k -forma $\mathbf{f}^*\omega \in \Omega^k(E^n)$ definida por

$$\mathbf{f}^*\omega(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \omega(\mathbf{f}(\mathbf{x}))(D\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{v}_1, \dots, D\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{v}_k)$$

para $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in E^n$.

3. *Propriedades do pull-back:* Se ω e η são formas de graus apropriados então
- i. $\mathbf{f}^*(\omega + \eta) = \mathbf{f}^*\omega + \mathbf{f}^*\eta$;
- ii. $\mathbf{f}^*(\omega \wedge \eta) = \mathbf{f}^*\omega \wedge \mathbf{f}^*\eta$.
4. Se $\omega \in \Omega^k(E^m)$ é uma k -forma,

$$\omega = \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \omega_{i_1 \dots i_k}(\mathbf{x}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

a sua *derivada exterior* é a $(k+1)$ -forma

$$d\omega = \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^i}(\mathbf{x}) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

5. *Propriedades da derivada exterior:* Se ω e η são formas de graus apropriados então
- $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$;
 - $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$, onde $\omega \in \Omega^k(E^n)$;
 - $d(d\omega) = 0$ (abreviadamente, $d^2 = 0$);
 - $d(\mathbf{f}^*\omega) = \mathbf{f}^*(d\omega)$, onde $\mathbf{f} : E^m \rightarrow E^n$ é C^∞ .
6. Por definição, $\Omega^0(E^n) = \mathbb{R}$ e portanto as 0-formas $\Omega^0(E^n)$ são as funções C^∞ $g : E^n \rightarrow \mathbb{R}$. Se ω é uma k -forma e $\mathbf{f} : E^m \rightarrow E^n$ é C^∞ tem-se
- $g \wedge \omega = g\omega$;
 - $\mathbf{f}^*g = g \circ \mathbf{f}$;
 - $dg = \frac{\partial g}{\partial x^1} dx^1 + \dots + \frac{\partial g}{\partial x^n} dx^n$.
- (em particular, $d(x^i) = dx^i$, o que justifica esta notação).
7. $\omega \in \Omega^k(E^n)$ diz-se *fechada* se $d\omega = 0$.
8. $\omega \in \Omega^k(E^n)$ diz-se *exacta* se existe uma forma $\eta \in \Omega^{k-1}(E^n)$ tal que $\omega = d\eta$ (η diz-se um *potencial* para ω).
9. ω exacta \Rightarrow ω fechada.
10. $A \subset E^n$ diz-se *em estrela* se existe um ponto $\mathbf{x}_0 \in A$ (dito o *centro*) tal que $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}] \subset A$ para todo o $\mathbf{x} \in A$, onde

$$[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}] = \{\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) : t \in [0, 1]\}$$

designa o segmento de recta de extremos \mathbf{x}_0 e \mathbf{x} .

11. *Lema de Poincaré:* Seja $\omega \in \Omega^k(U)$, onde $U \subset E^n$ é aberto. Se U é em estrela e ω é fechada, então ω é exacta.

IV. Integração em Variedades

1. Parametrizações, Cartas e Orientabilidade

- Seja $M \subset E^n$ uma variedade de dimensão m , $\mathbf{x} \in M$ e $U \ni \mathbf{x}$ uma vizinhança aberta. $\mathbf{g} : V \subset E^m \rightarrow M \cap U$ diz-se uma *parametrização* de classe C^q de $M \cap U$ se é uma bijecção de classe C^q com $\mathbf{g}^{-1} : M \cap U \rightarrow V$ contínua e $\text{rank } D\mathbf{g} = m$.
- $M \subset E^n$ é uma variedade de dimensão m e classe C^q sse para todo o $\mathbf{x} \in M$ existe uma vizinhança aberta $U \ni \mathbf{x}$ e uma parametrização de classe C^q $\mathbf{g} : V \subset E^m \rightarrow M \cap U$. Além disso, as colunas de $D\mathbf{g}(\mathbf{t})$ formam uma base para $T_{\mathbf{g}(\mathbf{t})}M$.
- Se $\mathbf{g} : V \subset E^m \rightarrow M \cap U$ é uma parametrização, a função contínua $\mathbf{g}^{-1} : M \cap U \rightarrow V$ diz-se uma *carta local*.
- Sejam $\mathbf{g} : V \subset E^m \rightarrow M \cap U$ e $\mathbf{h} : W \subset E^m \rightarrow M \cap U$ duas parametrizações, e $\varphi : M \cap U \rightarrow V$ e $\psi : M \cap U \rightarrow W$ as respectivas cartas locais. Então a mudança de carta local $\psi \circ \mathbf{g} : V \rightarrow W$ é de classe C^q e $\det D\psi \circ \mathbf{g} \neq 0$.
- Seja $\mathbf{f} : V \subset E^m \rightarrow W \subset E^m$ de classe C^q invertível com inversa de classe C^q . Diz-se que \mathbf{f} *preserva orientações* se $\det D\mathbf{f} > 0$, e que \mathbf{f} *inverte orientações* se $\det D\mathbf{f} < 0$.
- Uma variedade $M \subset E^n$ diz-se *orientável* se pode ser parametrizada por forma a que todas as respectivas mudanças de cartas locais preservem orientações. Uma *orientação* de M é simplesmente uma escolha de um sistema de parametrizações nestas condições.

2. Integrais de Formas Diferenciais

1. Se $g : V \subset E^m \rightarrow M \cap U$ é uma parametrização e $\omega \in \Omega^m(E^n)$, define-se o integral de ω ao longo de $M \cap U$ com a orientação induzida por g através de

$$\int_{g(V)} \omega = \int_V \mathbf{g}^* \omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m) dt^1 \dots dt^m.$$

Resulta desta definição que

$$\int_V f(\mathbf{t}) dt^1 \wedge \dots \wedge dt^m = \int_V f(\mathbf{t}) dt^1 \dots dt^m,$$

e portanto

$$\int_{g(V)} \omega = \int_V \mathbf{g}^* \omega.$$

2. A m -forma $dV_m \in \Omega^m(E^n)$ diz-se um *elemento de volume* para a variedade de dimensão m $M \subset E^n$ se

$$|dV_m(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)| = V_m(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m) = \sqrt{\det G}$$

para quaisquer $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in T_{\mathbf{x}}M$ e $\mathbf{x} \in M$, onde G é a matriz $m \times m$ dada por $G_{ij} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$.

3. Se $g : V \subset E^m \rightarrow M \cap U$ é uma parametrização e $dV_m \in \Omega^m(E^n)$ é um elemento de volume para M , então

$$\mathbf{g}^* dV_m = \pm \sqrt{\det G(\mathbf{t})} dt^1 \wedge \dots \wedge dt^m$$

onde a matriz $m \times m$ $G(\mathbf{t})$ é dada por

$$G_{ij} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^j}.$$

O elemento de volume diz-se *compatível* com a orientação induzida por g se o sinal acima é positivo, ou, equivalentemente, se

$$dV_m \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^m} \right) > 0.$$

4. Se $g : V \subset E^m \rightarrow M \cap U$ é uma parametrização e $dV_m \in \Omega^m(E^n)$ é um elemento de volume para M compatível com a orientação induzida por g , define-se o *volume m -dimensional de $M \cap U$* como

$$\begin{aligned} V_m(M \cap U) &= \int_{M \cap U} dV_m = \int_V \mathbf{g}^* dV_m = \int_V \sqrt{\det G(\mathbf{t})} dt^1 \wedge \dots \wedge dt^m \\ &= \int_V \sqrt{\det G(\mathbf{t})} dt^1 \dots dt^m. \end{aligned}$$

Note-se que este integral é independente da orientação induzida por g .

5. Se $f : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ é um campo escalar, $g : V \subset E^m \rightarrow M \cap U$ é uma parametrização e $dV_m \in \Omega^m(E^n)$ é um elemento de volume para M compatível com a orientação induzida por g , define-se o integral de f ao longo de $M \cap U$ como

$$\begin{aligned} \int_{M \cap U} f dV_m &= \int_V \mathbf{g}^*(f dV_m) = \int_V f(g(\mathbf{t})) \sqrt{\det G(\mathbf{t})} dt^1 \wedge \dots \wedge dt^m \\ &= \int_V f(g(\mathbf{t})) \sqrt{\det G(\mathbf{t})} dt^1 \dots dt^m. \end{aligned}$$

Note-se que este integral é independente da orientação induzida por g .

6. Se $M \subset E^n$ é uma variedade de dimensão m limitada e é dada uma *função densidade de massa por unidade de volume m -dimensional* $\sigma : E^n \rightarrow [0, +\infty[$, define-se:

- i. O *volume m -dimensional* de M :

$$V = V_m(M) = \int_M dV_m.$$

- ii. A *massa* de M :

$$M = \int_M \sigma dV_m.$$

- iii. A coordenada k do *centro de massa* de M :

$$x_{CM}^k = \frac{1}{M} \int_M x^k \sigma dV_m.$$

- iv. A coordenada k do *centróide* de M :

$$x_C^k = \frac{1}{V} \int_M x^k dV_m.$$

- v. O *momento de inércia* de M em relação a um determinado eixo:

$$I = \int_M d^2 \sigma dV_m,$$

onde $d(\mathbf{x})$ é a distância do ponto \mathbf{x} ao eixo.

7. Se $\mathbf{F} : E^n \rightarrow E^n$ é um campo vectorial C^∞ , definem-se $\omega_{\mathbf{F}} \in \Omega^1(E^n)$ e $\Omega_{\mathbf{F}} \in \Omega^{n-1}(E^n)$ através das fórmulas

$$\omega_{\mathbf{F}} = F^1 dx^1 + \dots + F^n dx^n;$$

$$\Omega_{\mathbf{F}} = F^1 dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n - \dots + (-1)^{n-1} F^n dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}.$$

8. Se $M \subset E^n$ é uma variedade de dimensão 1, $\tau : M \rightarrow E^n$ um vector tangente unitário e $\mathbf{F} : E^n \rightarrow E^n$ um campo vectorial C^∞ ,

$$\int_M \omega_{\mathbf{F}} = \int_M \mathbf{F} \cdot \tau dV_1,$$

onde a orientação de M é definida por τ . Este integral diz-se o *integral de linha* de \mathbf{F} ao longo de M na direcção determinada por τ ; no caso em que \mathbf{F} é uma força, tem a interpretação física do trabalho realizado por \mathbf{F} sobre uma partícula que percorre M na direcção determinada por τ .

9. Se $M \subset E^n$ é uma variedade de dimensão $n - 1$ e $\mathbf{n} : M \rightarrow E^n$ um vector normal unitário, $dV_{n-1} = \Omega_{\mathbf{n}}$ é um elemento de volume para M .
10. Se $M \subset E^n$ é uma variedade de dimensão $n - 1$, $\mathbf{n} : M \rightarrow E^n$ um vector normal unitário e $\mathbf{F} : E^n \rightarrow E^n$ um campo vectorial C^∞ ,

$$\int_M \Omega_{\mathbf{F}} = \int_M \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dV_{n-1},$$

onde a orientação de M é definida por $dV_{n-1} = \Omega_{\mathbf{n}}$. Este integral diz-se o *fluxo* de \mathbf{F} através de M na direcção determinada por \mathbf{n} ; no caso em que $\mathbf{F} = \rho \mathbf{v}$, onde ρ e \mathbf{v} são a densidade e velocidade de um fluido, tem a interpretação física da massa de fluido que atravessa M na direcção determinada por \mathbf{n} por unidade de tempo.

11. Para verificar se uma determinada parametrização $\mathbf{g} : V \subset E^{n-1} \rightarrow M \cap U \subset E^n$ induz a orientação compatível com o elemento de volume $dV_{n-1} = \Omega_{\mathbf{n}}$ (ou seja, se o integral de $\Omega_{\mathbf{F}}$ fornece o fluxo de \mathbf{F} na direcção de \mathbf{n}), basta verificar se

$$\mathbf{g}^* \Omega_{\mathbf{n}} = f(\mathbf{t}) dt^1 \wedge \dots \wedge dt^{n-1}$$

com $f > 0$ (basta verificar num ponto particular). Alternativamente, basta verificar se

$$\det \left(\mathbf{n}, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^{n-1}} \right) > 0.$$

Se $n = 3$, isto é equivalente a verificar se

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^2} = f(\mathbf{t}) \mathbf{n}$$

com $f > 0$.

12. Se $\mathbf{g} : V \subset E^2 \rightarrow M \cap U \subset E^3$ é uma parametrização e dV_2 é um elemento de volume para M compatível com a orientação induzida por esta parametrização, então

$$\mathbf{g}^* dV_2 = \left\| \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^2} \right\| dt^1 \wedge dt^2.$$

Em particular, o fluxo do campo vectorial $\mathbf{F} : E^3 \rightarrow E^3$ através de $M \cap U$ na direcção de $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^2}$ é dado por

$$\int_V \mathbf{F}(\mathbf{g}(t^1, t^2)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^2} \right) dt^1 \wedge dt^2 = \int_V \mathbf{F}(\mathbf{g}(t^1, t^2)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^2} \right) dt^1 dt^2.$$

13. $M \subset E^n$ diz-se uma *variedade com bordo* de dimensão k (e classe C^q) se $M = \dot{M} \cup \partial M$, onde \dot{M} é uma variedade de dimensão k (e classe C^q), ∂M é uma variedade de dimensão $k - 1$ (e classe C^q), dita o *bordo* de M , e para todo o $\mathbf{x} \in \partial M$ existe um aberto $U \ni \mathbf{x}$ e uma aplicação de classe C^q $\mathbf{g} : V \cap \{t^1 \leq 0\} \rightarrow M \cap U$ tais que $\mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{x}$, $\mathbf{g}(V \cap \{t^1 < 0\}) = \dot{M} \cap U$ e $\mathbf{g}(V \cap \{t^1 = 0\}) = \partial M \cap U$. M diz-se orientável se \dot{M} é orientável, e se $\omega \in \Omega^k(E^n)$ define-se

$$\int_M \omega = \int_{\dot{M}} \omega.$$

Se \mathbf{g} determina a orientação de M , a *orientação induzida por \mathbf{g}* em ∂M é determinada por $\mathbf{h} : W \subset E^{k-1} \rightarrow E^n$ dada por $\mathbf{h}(u^1, \dots, u^{k-1}) = \mathbf{g}(0, u^1, \dots, u^{k-1})$.

14. *Teorema de Stokes (Teorema Fundamental do Cálculo)*: Se $M \subset E^n$ é uma variedade com bordo compacta orientável de dimensão k e $\omega \in \Omega^{k-1}(E^n)$ então

$$\int_M d\omega = \oint_{\partial M} \omega,$$

onde ∂M tem a orientação induzida pela de M .

15. Se M é uma variedade de dimensão k (sem bordo) compacta orientável e $\omega \in \Omega^{k-1}(E^n)$ então

$$\oint_M d\omega = 0$$

(\oint significa apenas que a região de integração é uma variedade compacta).

16. *Notação:* Se $\mathbf{F} : E^n \rightarrow E^n$ é um campo vectorial e M é uma variedade de dimensão 1 com parametrização $\mathbf{g} :]0, 1[\rightarrow E^n$, é habitual escrever

$$\int_M \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} = \int_M \omega_{\mathbf{F}} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{g}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{g}}{dt}(t) dt.$$

17. *Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha:* Se $f : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ é um campo escalar e M é uma variedade de dimensão 1 com bordo parametrizada por $\mathbf{g} : [0, 1] \rightarrow E^n$, com $\mathbf{g}(0) = \mathbf{a}$ e $\mathbf{g}(1) = \mathbf{b}$, então

$$\int_M \nabla f \cdot d\mathbf{g} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}).$$

18. Se $\mathbf{F} : E^n \rightarrow E^n$ é um campo vectorial de classe C^1 , a sua *divergência* é o campo escalar

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F^1}{\partial x^1} + \dots + \frac{\partial F^n}{\partial x^n}.$$

19. *Teorema da Divergência:* Se $\mathbf{F} : E^n \rightarrow E^n$ é um campo vectorial de classe C^1 e M é uma variedade com bordo de dimensão n (i.e., um conjunto compacto $M \subset E^n$ cuja fronteira é uma variedade), então

$$\int_M \nabla \cdot \mathbf{F} dV_n = \oint_{\partial M} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dV_{n-1},$$

onde \mathbf{n} é a normal unitária exterior.

3. Cálculo Vectorial em E^3

1. Se $\mathbf{F} : E^3 \rightarrow E^3$ é um campo vectorial de classe C^1 , o seu *rotacional* é o campo vectorial

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F^1 & F^2 & F^3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F^3}{\partial y} - \frac{\partial F^2}{\partial z}, \frac{\partial F^1}{\partial z} - \frac{\partial F^3}{\partial x}, \frac{\partial F^2}{\partial x} - \frac{\partial F^1}{\partial y} \right).$$

2. *Teorema de Stokes para Campos Vectoriais:* Se $\mathbf{F} : E^3 \rightarrow E^3$ é um campo vectorial de classe C^1 e M é uma superfície com bordo, então

$$\int_M (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dV_2 = \oint_{\partial M} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g},$$

onde ∂M deve ser percorrido no sentido tal que o produto externo do vector tangente ao bordo pela normal unitária \mathbf{n} aponte *para fora* da superfície.

3. *Regra da Mão Direita:* Uma maneira simples de recordar a relação entre as orientações da superfície e do seu bordo no Teorema de Stokes é a seguinte: desenhando um pequeno quadrado na superfície tal que um dos seus lados é um pedaço do bordo, a orientação correcta do bordo é a que induz a circulação ao longo dos lados do quadrado que fornece a normal unitária \mathbf{n} por aplicação da regra da mão direita (fechando a mão direita no sentido da circulação no quadrado, o polegar aponta na direcção da normal).

4. Se $f : E^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é um campo escalar de classe C^2 , então

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}.$$

5. Se $\mathbf{F} : E^3 \rightarrow E^3$ é um campo vectorial de classe C^2 , então

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0.$$

6. *Lema de Poincaré para Campos Vectoriais:* Se $\mathbf{F} : U \subset E^3 \rightarrow E^3$ é um campo vectorial de classe C^2 e U é um conjunto em estrela então:

- i. $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{F} = \nabla f$ para algum campo escalar $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ (dito um *potencial escalar* para \mathbf{F});
- ii. $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \Rightarrow \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$ para algum campo escalar $\mathbf{A} : U \rightarrow E^3$ (dito um *potencial vector* para \mathbf{F}).

7. *Dicionário Formas/Campos em E^3 :*

i. Produtos:

$$\omega_{f\mathbf{F}} = f\omega_{\mathbf{F}};$$

$$\omega_{\mathbf{F} \times \mathbf{G}} = \omega_{\mathbf{F}} \wedge \omega_{\mathbf{G}};$$

$$\omega_{\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}} = \Omega_{\mathbf{F}} \wedge \omega_{\mathbf{G}} = \omega_{\mathbf{F}} \wedge \Omega_{\mathbf{G}}.$$

ii. Derivadas:

$$\omega_{\nabla f} = df;$$

$$\Omega_{\nabla \times \mathbf{F}} = d\Omega_{\mathbf{F}};$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{F})dV_3 = d\Omega_{\mathbf{F}}.$$

iii. Integrais:

$$\int_M \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} = \int_M \omega_{\mathbf{F}};$$

$$\int_M \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dV_2 = \int_M \Omega_{\mathbf{F}};$$

iv. Teoremas Sobre Derivadas:

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0} \Leftrightarrow d(df) = 0;$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \Leftrightarrow d(d\omega_{\mathbf{F}}) = 0.$$

v. Teoremas Sobre Integrais:

$$\int_M (\nabla f) \cdot d\mathbf{g} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) \Leftrightarrow \int_M df = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a});$$

$$\iint_M (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dV_2 = \oint_{\partial M} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} \Leftrightarrow \int_M d\omega_{\mathbf{F}} = \oint_{\partial M} \omega_{\mathbf{F}};$$

$$\iiint_M (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV_3 = \iint_{\partial M} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dV_2 \Leftrightarrow \int_M d\Omega_{\mathbf{F}} = \oint_{\partial M} \Omega_{\mathbf{F}}.$$

8. Se $g : V \rightarrow E^n$ é uma mudança de coordenadas, $g = g(t^1, \dots, t^n)$, e $f : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ é um campo escalar, então:

i. $\frac{\partial}{\partial t^i} \equiv \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^i} = \frac{\partial g^1}{\partial t^i} \mathbf{e}_n + \dots + \frac{\partial g^n}{\partial t^i} \mathbf{e}_n = \frac{\partial g^1}{\partial t^i} \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + \frac{\partial g^n}{\partial t^i} \frac{\partial}{\partial x^n}$;

ii. $\frac{\partial f}{\partial t^i} = df \left(\frac{\partial}{\partial t^i} \right) = D_{\frac{\partial}{\partial t^i}} f$;

iii. $\left\{ \frac{\partial}{\partial t^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t^n} \right\}$ é uma base para E^n ;

iv. $dt^i \left(\frac{\partial f}{\partial t^j} \right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$;

v. $\{dt^1, \dots, dt^n\}$ é uma base para $(E^n)^*$, dita a *base dual* de $\left\{ \frac{\partial}{\partial t^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t^n} \right\}$;

vi. $\omega_{\frac{\partial}{\partial t^i}} = \sum_{j=1}^n G_{ij} dt^j$, onde $G_{ij} = \frac{\partial}{\partial t^i} \cdot \frac{\partial}{\partial t^j}$.

9. *Coordenadas Cilíndricas em E^3* : Tem-se

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e portanto $\left\{ \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$ é uma base ortogonal correspondendo às formas $\{dr, r^2 d\theta, dz\}$.

A respectiva base ortonormal satisfaz

$$\mathbf{e}_r = \frac{\partial}{\partial r} \sim dr \sim \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_z \sim r d\theta \wedge dz;$$

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \sim r d\theta \sim \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r \sim dz \wedge dr;$$

$$\mathbf{e}_z = \frac{\partial}{\partial z} \sim dz \sim \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta \sim r dr \wedge d\theta$$

(onde escrevemos $\mathbf{F} \sim \omega_{\mathbf{F}} \sim \Omega_{\mathbf{F}}$). Tem-se ainda

$$dV_3 = r dr \wedge d\theta \wedge dz.$$

10. *Coordenadas Esféricas em E^3* : Tem-se

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

e portanto $\left\{ \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\}$ é uma base ortogonal correspondendo às formas $\{dr, r^2 d\theta, r^2 \sin^2 \theta d\varphi\}$.

A respectiva base ortonormal satisfaz

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \frac{\partial}{\partial r} \sim dr \sim \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\varphi \sim r^2 \operatorname{sen} \theta d\theta \wedge d\varphi; \\ \mathbf{e}_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \sim r d\theta \sim \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_r \sim r \operatorname{sen} \theta d\varphi \wedge dr; \\ \mathbf{e}_\varphi &= \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \sim r \operatorname{sen} \theta d\varphi \sim \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta \sim r dr \wedge d\theta.\end{aligned}$$

Tem-se ainda

$$dV_3 = r^2 \operatorname{sen} \theta dr \wedge d\theta \wedge d\varphi.$$

4. Lema de Poincaré Generalizado

1. Dois conjuntos abertos $U, V \in E^n$ dizem-se *difeomorfos* se existe uma bijecção $f : U \rightarrow V$ de classe C^∞ cuja inversa é também de classe C^∞ (f diz-se um *difeomorfismo*).
2. *Lema de Poincaré Generalizado:* Se U é em estrela e V é difeomorfo a U então qualquer forma fechada em V é exacta.