Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III - LEFT & LMAC

1º Teste - 10 de Novembro de 2001 - 9h

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Seja
$$M = \left\{(x, y, z) \in E^3 : y = x \operatorname{tg} z, -\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

(2 val.) (a) Prove que M é uma variedade.

(2 val.) (b) Determine os pontos em que M é vertical (i.e., em que o espaço tangente a M contém $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$).

(2 val.) (c) Em que pontos de M é que o Teorema da Função Implícita não lhe garante a existência de uma vizinhança na qual M é o gráfico de uma função $z = f(x, y)$? O que pode dizer sobre esses pontos?

(3 val.) (d) Justifique que existe pelo menos um ponto em M cuja distância ao ponto $\mathbf{e}_y = (0, 1, 0)$ é mínima. Calcule esse(s) ponto(s).

2. Considere o seguinte conjunto mensurável:
$$A = \left\{(x, y, z) \in E^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 \leq z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\right\}.$$

(3 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de A em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

(3 val.) b) Seja $f(x, y, z) = x$. Calcule $\int_A f dV_3$.

3. Seja $A \subset E^3$ um conjunto mensurável limitado. A diz-se *simétrico em relação ao eixo dos* zz se $(x, y, z) \in A \Rightarrow (-x, -y, z) \in A$.

(2 val.) a) Mostre que se A é simétrico em relação ao eixo dos zz então o centróide de A é um ponto desse eixo.

(1 val.) b) Mostre que se A possui dois eixos de simetria distintos então estes eixos têm que se intersectar.

(2 val.) **4.** Mostre que o Teorema da Função Implícita implica o Teorema da Função Inversa.