Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III - LEFT & LMAC

Resolução Sumária do 1º Teste - 10 de Novembro de 2001 - 9h

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Seja

$$M = \left\{(x, y, z) \in E^3 : y = x \operatorname{tg} z, -\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

(2 val.) (a) Prove que M é uma variedade.

Resolução: A matriz Jacobiana da função

$$F(x, y, z) = y - x \operatorname{tg} z,$$

cujo conjunto de nível $F^{-1}(0)$ é M, é dada por

$$DF = \left[\begin{array}{ccc} -\operatorname{tg} z & 1 & -x \sec^2 z \end{array}\right].$$

Uma vez que esta matriz linha nunca se anula, a sua característica é constante igual a 1 no domínio de diferenciabilidade de F. Logo M é variedade.

(2 val.) (b) Determine os pontos em que M é vertical (i.e., em que o espaço tangente a M contém $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$).

Resolução: O espaço tangente conterá $\mathbf{e}_z$ exactamente quando os espaço normal for ortogonal a este vector. Portanto os pontos que procuramos são os pontos da variedade nos quais

$$(-\operatorname{tg} z, 1, -x \sec^2 z) \cdot (0, 0, 1) = 0 \Leftrightarrow x \sec^2 z = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Os pontos da variedade que satisfazem $x = 0$ são os pontos tais que $y = 0 \cdot \operatorname{tg} z = 0$ e $-\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}$. Portanto os pontos nos quais a variedade é vertical são os pontos da forma $(0, 0, z)$ com $-\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}$.

(2 val.) (c) Em que pontos de M é que o Teorema da Função Implícita não lhe garante a existência de uma vizinhança na qual M é o gráfico de uma função $z = f(x, y)$? O que pode dizer sobre esses pontos?

Resolução: O Teorema da Função Implícita só não garante a existência de uma vizinhança na qual M é o gráfico de uma função $z = f(x, y)$ nos pontos de M nos quais

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow -x \sec^2 z = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

i.e., nos pontos determinados na alínea anterior. M não é o gráfico de uma função $z = f(x, y)$ em qualquer vizinhança destes pontos, uma vez que em tal vizinhança existem infinitos pontos com $x = y = 0$ mas diferentes valores de z.

(3 val.) (d) Justifique que existe pelo menos um ponto em M cuja distância ao ponto $\mathbf{e}_y = (0,1,0)$ é mínima. Calcule esse(s) ponto(s).

Resolução: Note-se que uma vez que a origem pertence a M, a distância de $\mathbf{e}_y$ a M é certamente ≤ 1. Tomemos a bola fechada $\overline{B}_{\frac{3}{2}}(\mathbf{e}_y)$; uma vez que $\frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}$, o conjunto $M \cap \overline{B}_{\frac{3}{2}}(\mathbf{e}_y)$ é compacto. Uma vez que a distância a $\mathbf{e}_y$ é uma função contínua, possuirá pelo menos um ponto de mínimo neste conjunto, ponto esse que, claro está, será um ponto de M cuja distância a $\mathbf{e}_y$ é mínima.

Uma vez que sabemos que existe um ponto de M que minimiza a função

$$f(x,y,z) = x^2 + (y-1)^2 + z^2$$

(quadrado da distância a $\mathbf{e}_y$), sabemos que este será necessariamente uma solução do sistema dado pelo método dos multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} \nabla(f(x,y,z) + \lambda F(x,y,z)) = \mathbf{0} \\ F(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \lambda \operatorname{tg} z = 0 \\ 2(y-1) + \lambda = 0 \\ 2z - \lambda x \sec^2 z = 0 \\ y - x \operatorname{tg} z = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação obtemos $x = \frac{\lambda}{2} \operatorname{tg} z$, e da segunda $y = 1 - \frac{\lambda}{2}$. Usando a última equação, temos $x \operatorname{tg} z = 1 - \frac{\lambda}{2}$, e portanto $\frac{\lambda}{2} \operatorname{tg}^2 z = 1 - \frac{\lambda}{2}$. Recordando que $\operatorname{tg}^2 z + 1 = \sec^2 z$, obtemos $\frac{\lambda}{2} \sec^2 z = 1$. Portanto a terceira equação implica que $x = z$. Dado que $\frac{\lambda}{2} = \cos^2 z$, a primeira equação fica $x = \operatorname{sen} z \cos z = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2z)$, e portanto $z = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2z)$. É fácil ver que a única solução desta equação é $z = 0$, e portanto $x = z = 0$. A equação da variedade implica então $y = 0$. Logo a única solução do sistema (e portanto o ponto de M cuja distância a $\mathbf{e}_y$ é mínima) é a origem.

2. Considere o seguinte conjunto mensurável:

$$A = \left\{(x,y,z) \in E^3 : (\sqrt{x^2+y^2} - 1)^2 \leq z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\right\}.$$

(3 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de A em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

Resolução: As secções com z constante formam quartos de coroas circulares no plano xOy, com $x, y \geq 0$, com raio interior dado por $1 - \sqrt{z}$ e raio exterior dado por $1 + \sqrt{z}$. Logo, temos

$$V_3(A) = \int_0^1 \left(\int_0^{1-\sqrt{z}} \int_{\sqrt{(1-\sqrt{z})^2 - y^2}}^{\sqrt{(1+\sqrt{z})^2 - y^2}} dxdy + \int_{1-\sqrt{z}}^{1+\sqrt{z}} \int_0^{\sqrt{(1+\sqrt{z})^2 - y^2}} dxdy \right) dz.$$

(3 val.) b) Seja $f(x,y,z) = x$. Calcule $\int_A f dV_3$.

Resolução: Em coordenadas cilíndricas temos $x = r\cos\theta$. Logo,

$$\begin{aligned} \iiint_A x dxdydz &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_{(r-1)^2}^1 r\cos\theta \; rdzdrd\theta \\ &= \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}(0)\right] \int_0^2 r^2(1-(r-1)^2)dr = \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

3. Seja $A \subset E^3$ um conjunto mensurável limitado. A diz-se *simétrico em relação ao eixo dos* zz se $(x, y, z) \in A \Rightarrow (-x, -y, z) \in A$.

(2 val.) a) Mostre que se A é simétrico em relação ao eixo dos zz então o centróide de A é um ponto desse eixo.

Resolução: Sejam

$$A_+ = \{(x, y, z) \in A : x > 0\}, \qquad A_- = \{(x, y, z) \in A : x < 0\}$$

e considere-se a mudança de variável

$$(x, y, z) = \mathbf{g}(\xi, \eta, \zeta) = (-\xi, -\eta, \zeta)$$

cujo Jacobiano é

$$J\mathbf{g} = \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

Uma vez que o plano $x = 0$ tem medida nula e a imagem de A_+ pela mudança de variáveis é A_- (devido à simetria do conjunto), temos

$$\begin{aligned} \int_A x dV_3 &= \int_{A_+} x dV_3 + \int_{A_-} x dV_3 = \int_{A_+} x dV_3 + \int_{A_+} (-\xi) dV_3 \\ &= \int_{A_+} x dV_3 - \int_{A_+} x dV_3 = 0 \end{aligned}$$

e portanto a coordenada x do centróide é nula. O mesmo é obviamente verdade para a coordenada y do centróide, e portanto o centróide é um ponto do eixo dos zz.

(1 val.) b) Mostre que se A possui dois eixos de simetria distintos então estes eixos têm que se intersectar.

Resolução: Qualquer eixo de simetria tem que conter o centróide; portanto dois quaisquer eixos de simetria têm que se intersectar no centróide.

(2 val.) **4.** Mostre que o Teorema da Função Implícita implica o Teorema da Função Inversa.

Resolução: Sejam $\mathbf{g} : E^n \to E^n$ uma função de classe C^1 e $\mathbf{x}_0 \in E^n$ tal que $\det D\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) \neq 0$. Queremos mostrar que existe uma vizinhança $U \ni \mathbf{x}_0$ na qual $\mathbf{g}$ é injectiva e a sua inversa local é de classe C^1. Para tal, considere-se a função $\mathbf{F} : E^n \times E^n \to E^n$ dada por

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} - \mathbf{g}(\mathbf{x}).$$

O conjunto de nível $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{0}) \subset E^n \times E^n$ é exactamente o gráfico de $\mathbf{g}$. Seja $\mathbf{y}_0 = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$; então $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$ e

$$\det \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = -\det D\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) \neq 0.$$

Logo pelo Teorema da Função Implícita existem vizinhanças $U \ni \mathbf{x}_0$ e $V \ni \mathbf{y}_0$ e uma função de classe C^1 $f : V \to U$ tal que para $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V$ se tem

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{y}),$$

isto é,

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{y}).$$

Portanto $\mathbf{g}$ é invertível e a sua inversa local $\mathbf{f}$ é de classe C^1.