# O INTEGRAL DE LEBESGUE

RUI LOJA FERNANDES

ABSTRACT. Esta notas contêm uma introdução à teoria da integração de Lebesgue, e formam como que um capítulo 3,5 do livro de M. Spivak "Calculus on Manifolds". O seu objectivo é servir como texto de apoio aos alunos da Turma E de Análise Matemática III. Apesar de existirem excelentes textos (ver bibliografia) que podem ser utilizados como introdução à teoria do integral de Lebesgue, não conheço nenhum que possua as características do livro de Spivak, e essenciais para o funcionamento deste projecto: (i) elementar; (ii) sucinto e (iii) que exija uma boa dose de trabalho individual. São pois estas as características que pretendi dar a estas notas. É claro que as dificuldades e virtudes mencionadas no prefácio desse livro sobre esta metodologia aplicam-se aqui *mutatis mutandis*.

Os prerequesitos para esta notas são portanto os três primeiros capítulos do livro de Spivak. Uma citação do tipo [S, thm 3-10] refere-se ao teorema 3-10 desse livro.

Lisboa, Outubro de 1998
Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico

## O integral de Lebesgue

Vamos agora estudar uma generalização do integral de Riemann, que acabámos de estudar, e que se chama *integral de Lebesgue*. Esta generalização vai permitir, por exemplo, extender a classe das funções integráveis: um exemplo simples de uma função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ integrável à Lebesgue que não é integravel à Riemann é

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \text{ é racional;} \\ 1, & \text{se } x \text{ é irracional.} \end{cases}$$

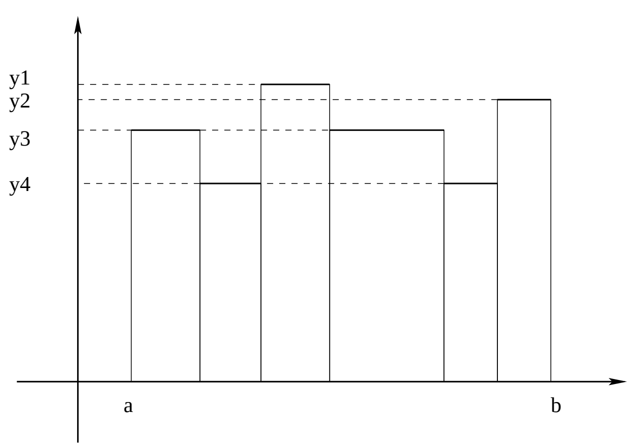
Esta extensão do conceito de integral tem inúmeras vantagens prácticas algumas das quais veremos mais tarde.

Uma forma simples de ilustrar a diferença entre o integral de Lebesgue e o de Riemann é a seguinte analogia. Suponhamos que tinhamos uma saco cheio moedas (digamos euros!) e que prendiamos saber quantos euros temos no saco. Podemos contar estas moedas de duas formas distintas:

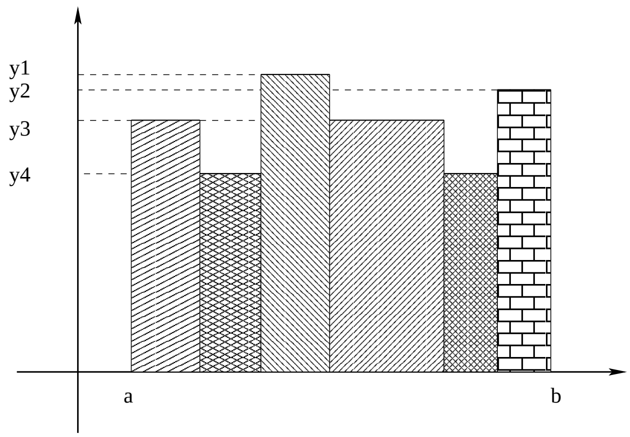
(i) Retiramos as moedas uma a uma do saco e vamos adicionando os seus valores;
(ii) Agrupamos as moedas do saco pelos seus valores, formando um grupo de moedas de 5 centimos, outro grupo de 10 centimos, etc. Contamos as moedas em cada grupo, multiplicamos pelos seus valores e somamos;

A segunda forma de contagem (que corresponde ao integral de Lebesgue) é muito mais eficiente do que a primeira forma de contagem (correspondente ao integral de Riemann), embora ambas forneçam o mesmo valor, claro. Note-se que para descrever (ii) tivemos de usar uma linguagem um pouco mais elaborada do que para descrever (i). Como veremos adiante, a definição do integral de Lebesgue também involve de facto um pouco mais de conceptualização do que a definição do integral de Riemann, mas por fim as funções integráveis à Riemann também são integráveis à Lebesgue e o valor do integral é o mesmo, claro.

A via aqui adoptada para a introdução do integral de Lebesgue assenta no conceito de medida. Uma medida não é mais que uma função que a certos subconjuntos $A \subset \mathbb{R}^n$ associa um número não negativo $\mu(A)$, a sua *medida* ou *volume*. Se considerarmos uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ com um número finito de valores como vimos, a

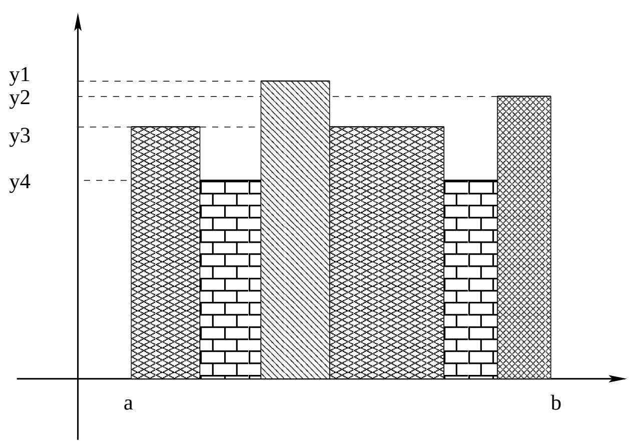



definição de integral de Riemann corresponde essencialmente em dividir o intervalo $[a, b]$ em subintervalos, multiplicar o valor que a função toma em cada subintervalo pelo seu comprimento, e somamos:




$$\int_a^b f dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Por outro lado, para o integral de Lebesgue, determinamos primeiro qual é a preimagem de cada valor que a função assume, multiplicamos a medida (ou volume) dessa preimagem por esse valor, e somamos:




$$\int_a^b f d\nu = \sum_{k=1}^{m} y_k \mu(E_k).$$

É claro que estes dois métodos dão o mesmo valor para o integral.

Para adoptar esta via, há pois que definir uma função que a cada conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ associe a sua medida $\mu(A)$. Esta função deve satisfazer certa propriedades naturais. Por exemplo, gostariamos certamente que:

(i) Para um rectangulo $A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ a medida é dada por $\mu(A) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$;
(ii) Se $A$ é a união de conjuntos $A_1, A_2, \ldots$ disjuntos dois a dois, então $\mu(A) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k)$;
(iii) Se $A$ é um conjunto com medida $\mu(A)$ então a sua tranlação $x + A = \{x + y : y \in A\}$ deverá ter a mesma medida: $\mu(x + A) = \mu(A)$;

Infelizmente não existe tal função!!! Na primeria parte deste capítulo, veremos como resolver este problema.

## MEDIDAS E $\sigma$-ÁLGEBRAS

**Definição A.1.** *Uma família $\mathfrak{A}$ de subconjuntos de $X$ diz-se uma* ***álgebra de conjuntos*** *se $\emptyset, X \in \mathfrak{A}$ e*

$$A, B \in \mathfrak{A} \Longrightarrow A \cup B, A - B \in \mathfrak{A}.$$

*Uma álgebra $\mathfrak{A}$ diz-se uma* ***$\sigma$-álgebra*** *se*

$$A_1, A_2, \dots \in A \Longrightarrow \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathfrak{A}.$$

Note que se $\mathfrak{A}$ é uma álgebra de conjuntos e $A, B \in \mathfrak{A}$ então

$$A \cap B = A - (A - B) \in \mathfrak{A},$$

logo $\mathfrak{A}$ é fechada para interseções. Da mesma forma, se $\mathfrak{A}$ é uma $\sigma$-álgebra é um exercício simples mostrar que se $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A}$ então $\bigcap_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathfrak{A}$. Vejamos dois exemplos:

(1) Seja $\mathfrak{A}$ a coleção de todos os subconjuntos de um conjunto $X$. É claro que $\emptyset, X \in \mathfrak{A}$ e que $\mathfrak{A}$ é fechada para uniões arbitrárias e diferenças de conjuntos, logo $\mathfrak{A}$ é uma $\sigma$-álgebra.
(2) Seja $\mathfrak{A}$ a coleção formada por todas as uniões finitas $I_1 \cup \dots \cup I_m$ de rectângulos de $\mathbb{R}^n$. Então $\mathfrak{A}$ é uma álgebra de conjuntos mas não é uma $\sigma$-álgebra (exercício).

A noção de medida que queremos discutir baseia-se na seguinte definição:

**Definição A.2.** *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra. Uma funçaõ $\phi : \mathfrak{A} \to [0, +\infty]$ não-constante diz-se* ***aditiva*** *se, dados $A, B \in \mathfrak{A}$,*

$$A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \phi(A \cup B) = \phi(A) + \phi(B).$$

A proposição seguinte fornece algumas propriedades elementares das funções aditivas. A sua demonstração fica como exercício.

**Proposição A.3.** *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra e $\phi : \mathfrak{A} \to [0, +\infty]$ uma função aditiva. Se $A, B, A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathfrak{A}$ então:*

(i) $\phi(\emptyset) = 0$;
(ii) $\phi(B) \leq \phi(A)$ *se* $B \subset A$;
(iii) $\phi(A - B) = \phi(A) - \phi(B)$ *se* $B \subset A$ *e* $\phi(B) < +\infty$;
(iv) $\phi(A_1 \cup A_2) = \phi(A_1) + \phi(A_2) - \phi(A_1 \cap A_2)$ *se* $\phi(A_1 \cap A_2) < +\infty$;
(v) $\phi(A_1 \cup \dots \cup A_k) = \phi(A_1) + \dots + \phi(A_k)$ *se* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *para* $i \neq j$;

Note que, em princípio, não podemos dizer nada sobre o comportamento das funções aditivas para conjuntos $A$ que são uniões (mesmo disjuntas) de conjuntos $A_1, A_2, \dots$. Para isso precisamos de mais uma definição:

**Definição A.4.** *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra. Uma funçaõ $\phi : \mathfrak{A} \to [0, +\infty]$ aditiva diz-se* ***$\sigma$-aditiva*** *se, para $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A}$ com $\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathfrak{A}$, temos*

$$A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j) \Longrightarrow \phi(\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \phi(A_j).$$

Um **espaço de medida** é uma par $(\mathfrak{M}, \mu)$ onde $\mathfrak{M}$ é uma $\sigma$-álgebra num conjunto $X$ e $\mu : \mathfrak{M} \to [0, +\infty]$ é uma função $\sigma$-aditiva. Os elementos de $\mathfrak{M}$ dizem-se **conjuntos mensuráveis** e a função $\mu$ diz-se uma **medida** em $X$. Uma boa parte do nosso estudo incidirá sobre uma certa medida em $\mathbb{R}^n$, a chamada medida de Lebesgue. Para esta medida, os rectângulos de $\mathbb{R}^n$ são conjuntos mensuráveis e a sua medida de Lebesgue coincide com os seu volume n-dimensional [S, chp 3].

Como um exemplo simples de um espaço de medida $(\mathfrak{M}, X)$ mencionamos a **medida discreta** num conjunto $X$. A $\sigma$-álgebra $\mathfrak{M}$ é formada por todos os subconjuntos $A \subset X$, e a medida de um subconjunto $A \subset X$ é

$$\mu(A) = \begin{cases} \text{cardinal de } A, & \text{se } A \text{ é finito;} \\ \\ +\infty, & \text{se } A \text{ é infinito.} \end{cases}$$

Esta medida é muito importante, por exemplo, na Teoria das Probabilidades.

Uma propriedade importante das funções $\sigma$-aditivas é a de podermos calculá-las por aproximação. Mais precisamente temos:

**Teorema A.5.** *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra e $\phi : \mathfrak{A} \to [0, +\infty]$ uma função $\sigma$-aditiva. Se $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ com $A_i \in \mathfrak{A}$ e $A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathfrak{A}$ então*

$$\lim_{j \to +\infty} \phi(A_j) = \phi(A).$$

*Demonstração.* Seja $B_1 = A_1$ e defina-se para $j = 2, 3, \dots$

$$B_j = A_j - A_{j-1}.$$

Claramente $B_j \in \mathfrak{A}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $A_j = B_1 \cup \dots \cup B_j$. Logo

$$\phi(A_j) = \sum_{k=1}^{j} \phi(B_k).$$

Como $\phi$ é $\sigma$-aditiva e $A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} B_j$ obtemos

$$\lim_{j \to +\infty} \phi(A_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \phi(B_j) = \phi(\bigcup_{j=1}^{+\infty} B_j) = \phi(A).$$

$\square$

### Problemas

**A.1.** *Seja $\mathfrak{A}$ uma $\sigma$-álgebra. Mostre que se $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A}$ então $\bigcap_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathfrak{A}$.*

**A.2.** *Demonstre a proposição A.3.*

**A.3.** *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra e $\phi : \mathfrak{A} \to [0, +\infty]$ uma função $\sigma$-aditiva. Se $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \in \mathfrak{A}$, $\phi(A_1) < +\infty$ e $A = \bigcap_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathfrak{A}$ mostre que*

$$\lim_{j \to +\infty} \phi(A_j) = \phi(A).$$

**A.4.** *Seja $\mathfrak{A}$ a família dos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que são união de um número finito de rectângulos disjuntos. Se $A = \bigcup_{j=1}^{N} I_j$ é um elemento de $\mathfrak{A}$ defina*

$$\mu^*(A) = \sum_{j=1}^{N} v(I_j).$$

(a) *Mostre que $\mathfrak{A}$ é uma álgebra de conjuntos;*
(b) *Mostre que $\mu^* : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ é uma função aditiva;*

**A.5.** *Seja $\mathfrak{A}$ uma $\sigma$-álgebra com um número infinito de elementos. Será que $\mathfrak{A}$ pode ser numerável?*

## Medida de Lebesgue

Seja $X = \mathbb{R}^n$ o espaço euclideano n-dimensional. Sabemos o que sigifica o volume n-dimensional $v(I)$ de um rectângulo $I \subset \mathbb{R}^n$ ([S,p. 47]). Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto, é natural considerar coberturas de $A$ por rectângulos abertos $\{I_1, I_2, \dots\}$ e definir

$$\mu^*(A) = \inf \sum_{n=1}^{+\infty} v(I_n),$$

onde o inf é tomado sobre todas as coberturas numeráveis de $A$ por rectângulos abertos. A função $\mu^*$ fica assim definida na $\sigma$-álgebra $\mathfrak{A}$ formada por todos os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ e costuma designar-se por **medida exterior de Lebesgue**.

**Proposição A.6.** *A medida exterior de Lebesgue $\mu^* : \mathfrak{A} \to [0, +\infty]$ satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;
(ii) $\mu^*(B) \leq \mu^*(A)$ *se* $B \subset A$;
(iii) $\mu^*(I) = v(I)$ *se* $I \subset \mathbb{R}^n$ *é um rectângulo;*
(iv) $\mu^*(x + A) = \mu^*(A)$ *se* $x \in \mathbb{R}^n$;
(v) $\mu^*(A) = 0$ *sse* $A$ *é um conjunto de medida nula;*
(vi) *Se* $A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j$ *então* $\mu^*(A) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \mu^*(A_j)$.

*Demonstração.* As demonstrações de (i)-(v) são deixadas como exercício. Para demonstrar (vi) podemos assumir que $\mu^*(A_j) < +\infty$, para todo o $j$. Dado $\varepsilon > 0$ existe uma cobertura $I_{j,k}$ $(k = 1, 2, \dots)$ de $A_j$ por rectângulos abertos, tal que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} v(I_{j,k}) < \mu^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Os $I_{j,k}$ $(j, k = 1, 2, \dots)$ formam um cobertura de $A$ por rectângulos abertos, logo

$$\mu^*(A) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} v(I_{j,k}) < \sum_{j=1}^{+\infty} \mu^*(A_j) + \varepsilon.$$

□

Um função que satifaz a desigualdade (vi) diz-se uma *função subaditiva*. Existem exemplos de subconjuntos $A_i \subset \mathbb{R}^n$, com $A_j \cap A_k = \emptyset$ se $j \neq k$, para os quais esta desigualdade é estrita, i. e., a medida exterior de Lebesgue não é $\sigma$-aditiva.

**Exemplo A.7.** *Definimos uma relação de equivalência no intervalo $[0, 1]$ estipulando que $x \sim y$ sse $x - y \in \mathbb{Q}$ (é fácil verificar que esta relação binária é de facto transitiva, simétrica e reflexiva).*

*Seja $E \subset [0, 1]$ um conjunto formado por exactamente um elemento de cada classe de equivalência de $\sim$. A existência de $E$ é garantida pelo axioma da escolha. Este conjunto tem as seguintes propriedades:*

(a) $(q + E) \cap (r + E) = \emptyset$ *se* $q, r \in \mathbb{Q}$ *e* $q \neq r$;
(b) $\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (q + E)$;
(c) $\mu^*(E) > 0$;

*De facto, se $q + x = r + y$ onde $x, y \in E$, $q, r \in \mathbb{Q}$, com $x \neq y$ e $q \neq r$, então temos $x \sim y$, o que não pode acontecer pois $E$ contém um elemento de cada classe de equivalência de $\sim$. Logo (a) é verdadeira. Por outro lado, se $x \in \mathbb{R}$ então existe um $q \in \mathbb{Q}$, tal que $x - q \in [0, 1]$ e, portanto, existe $e \in E$ tal que $x - q \sim e$. Concluimos que $x \in q' + E$ para algum racional $q'$, e (b) é verdadeira. Como $\mathbb{R}$ não tem medida nula, (b) mostra que $E$ também não tem medida nula. Pela proposição A.6 (v), concluímos que $\mu^*(E) > 0$.*

*Dada uma enumeração $\{q_1, q_2, q_3, \dots\}$ dos racionais entre 0 e 1, definimos subconjuntos $A_j \subset [0, 2]$ por*

$$A_j = q_j + E, \qquad j = 1, 2, 3, \dots.$$

*Seja $A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j$. Afirmamos que*

$$\mu^*(A) < \sum_{j=1}^{+\infty} \mu^*(A_j).$$

*É claro que $A \subset [0, 2]$ logo, pela proposição A.6 (ii), $\mu^*(A) \leq 2$. Por outro lado, pela proposição A.6 (iv), os $A_j$ têm todos a mesma medida exterior: $\mu^*(A_j) = \mu^*(E) > 0$. Assim, $\sum_{j=1}^{+\infty} \mu^*(A_j) = +\infty$.*

Vemos pois que a função $\mu^*$ não é $\sigma$-aditiva na $\sigma$-álgebra formada por *todos* os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Podemos, no entanto, procurar uma $\sigma$-álgebra mais pequena, que ainda contenha os rectângulos $I \subset \mathbb{R}^n$, e na qual $\mu^*$ é $\sigma$-aditiva.

**Definição A.8.** *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **mensurável à Lebesgue** se para todo o $\varepsilon > 0$ existem rectângulos $\{I_1, I_2, \dots\}$ tais que a sua união $U = \bigcup_{j=1}^{+\infty} I_j$ satisfaz*([1])

$$\mu^*(A \triangle U) < \varepsilon.$$

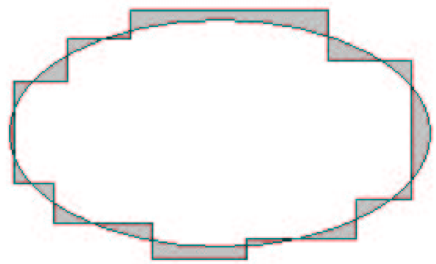


FIGURA 1. O conjunto $A \triangle U$.

Observe-se que nesta definição é indiferente supôr que os rectângulos são disjuntos. Em termos geométricos, podemos dizer que um conjunto é mensurável se puder ser bem aproximado, em termos de medida, por uma união numerável de rectângulos. De facto temos o seguinte resultado cuja demonstração deixamos como exercício:

**Lema A.9.** *Sejam $A, B \in \mathbb{R}^n$ com $\mu^*(A) < +\infty$ ou $\mu^*(B) < +\infty$. Então:*

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \triangle B)$$

Daqui em diante designamos por $\mathfrak{M}$ a família dos conjuntos mensuráveis à Lebesgue.

**Teorema A.10.** *A família $\mathfrak{M}$ dos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ mensuráveis à Lebesgue é uma $\sigma$-álgebra. A restrição de $\mu^*$ a $\mathfrak{M}$ é uma função $\mu : \mathfrak{M} \to [0, +\infty]$ $\sigma$-aditiva.*

*Demonstração.* Designemos por *conjuntos elementares* os conjuntos formados por uniões finitas, disjuntas, de rectângulos. Como vimos num problema da secção anterior, a família $\mathfrak{A}$ dos conjuntos elementares é uma álgebra e a restrição de $\mu^*$ a $\mathfrak{A}$ é aditiva.

Para efeitos da demonstração vamos ainda designar por $\mathfrak{M}_F$ a família dos subconjuntos $A \subset \mathbb{R}^n$ que podem ser aproximados por um conjunto elementar: $A \in \mathfrak{M}_F$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe $E \in \mathfrak{A}$ tal que

$$\mu^*(A \triangle E) < \varepsilon.$$

Deixamos como exercício verificar os seguintes factos:

(a) Se $A \in \mathfrak{M}$ e $\mu^*(A) < +\infty$ então $A \in \mathfrak{M}_F$;
(b) Se $A \in \mathfrak{M}$ então $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, com $A_j \in \mathfrak{M}_F$ disjuntos dois a dois;

[1]Usamos o símbolo $A \triangle B$ para designar a *diferença simétrica* dos conjuntos $A$ e $B$:

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B).$$

(c) Se $A_j \in \mathfrak{M}_F$ então $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}$.

Dividimos a demonstração em vários passos.

(i) $\mathfrak{M}_F$ *é uma álgebra:*

$\mathfrak{M}_F$ é fechada para os complementares pois se $A \in \mathfrak{M}_F$ então $A^c \in \mathfrak{M}_F$, já que é válida a relação

$$A^c \triangle E^c = A \triangle E.$$

Por outro lado, $\mathfrak{M}_F$ é fechada para uniões finitas: Se $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}_F$, dado $\varepsilon > 0$, existem conjuntos elementares $E_1, E_2 \in \mathfrak{A}$ tais que

$$\mu^*(A_1 \triangle E_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \mu^*(A_2 \triangle E_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como

$$(A_1 \cup A_2) \triangle (E_1 \cup E_2) \subset (A_1 \triangle E_1) \cup (A_2 \triangle E_2),$$

segue-se que

$$\mu^*((A_1 \cup A_2) \triangle (E_1 \cup E_2)) \leq \mu^*(A_1 \triangle E_1) + \mu^*(A_2 \triangle E_2) < \varepsilon.$$

Logo $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{M}_F$.

Sendo $\mathfrak{M}_F$ fechada para reuniões e complementares, é claro que se $A, B \in \mathfrak{M}_F$ então $A - B = (A^c \cup B)^c \in \mathfrak{M}_F$. Como $\mathbb{R}^n, \emptyset \in \mathfrak{M}_F$ concluímos que $\mathfrak{M}_F$ é uma álgebra.

(ii) *A restrição de* $\mu^*$ *a* $\mathfrak{M}_F$ *é aditiva:*

Sejam $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}_F$ conjuntos mensuráveis disjuntos. Já sabemos que

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) \leq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2).$$

Basta pois mostrar a desigualdade oposta e para isso podemos assumir que $\mu^*(A_1), \mu^*(A_2) < +\infty$.

Dado $\varepsilon > 0$, escolha-se conjuntos elementares $E_1, E_2 \in \mathfrak{A}$ tais que

$$\mu^*(A_1 \triangle E_1) < \varepsilon, \qquad \mu^*(A_2 \triangle E_2) < \varepsilon.$$

Como $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, temos

$$E_1 \cap E_2 \subset (A_1 \triangle E_1) \cup (A_2 \triangle E_2),$$

e concluímos que

$$\mu^*(E_1 \cap E_2) < 2\varepsilon.$$

Por outro lado, pelo lema A.9, também temos

$$|\mu^*(A_1) - \mu^*(E_1)| < \varepsilon, \qquad |\mu^*(A_2) - \mu^*(E_2)| < \varepsilon.$$

Tomemos $A = A_1 \cup A_2$ e $E = E_1 \cup E_2$. Visto que para conjuntos elementares a medida exterior é aditiva, obtemos

$$\mu^*(E) = \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2) - \mu^*(E_1 \cap E_2) > \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 4\varepsilon.$$

Finalmente, observamos que

$$A \triangle E \subset (A_1 \triangle E_1) \cup (A_2 \triangle E_2),$$

logo

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) \geq \mu^*(E) - \mu^*(A \triangle E) > \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 6\varepsilon.$$

Como $\varepsilon$ era arbitrário, concluímos que

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2),$$

o que mostra que a restrição de $\mu^*$ a $\mathfrak{M}_F$ é aditiva.

(iii) $\mu^*$ *restrita a* $\mathfrak{M}$ *é* $\sigma$*-aditiva:*

Se $A_j \in \mathfrak{M}$ são disjuntos, $A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathfrak{M}$, e existe um $A_j$ com $\mu^*(A_j) = +\infty$, é claro que

$$\mu^*(A) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu^*(A_j).$$

Por outro lado, se todos os $A_j$ têm $\mu^*(A_j) < +\infty$, então $A_j \in \mathfrak{M}_F$. Sendo $\mu^*$ sub-aditiva, temos, a priori,

$$\mu^*(A) \le \sum_{j=1}^{+\infty} \mu^*(A_j).$$

Como $\mu^*$ é aditiva em $\mathfrak{M}_F$ e $\bigcup_{j=1}^{N} A_j \subset A$, para todo o inteiro $N$, obtemos

$$\mu^*(\bigcup_{j=1}^{N} A_j) = \sum_{j=1}^{N} \mu^*(A_j) \le \mu^*(A).$$

Passando ao limite, concluímos que

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \mu^*(A_j) \le \mu^*(A).$$

Logo, também neste caso, temos

$$\mu^*(A) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu^*(A_j).$$

(iv) $\mathfrak{M}$ *é uma $\sigma$-álgebra:*

Se $A_1, A_2, \cdots \in \mathfrak{M}$ são conjuntos mensuráveis, seja $A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j$. Dado $\varepsilon > 0$, existem rectângulos $\{I_{j,k}\}$ tais que se $U_j = \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_{j,k}$ então:

$$\mu^*(A_j \triangle U_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Se $U = \bigcup_{j,k=1}^{+\infty} I_{j,k} = \bigcup_{j=1}^{+\infty} U_j$, então temos $A \triangle U \subset \bigcup_{j=1}^{+\infty}(A_j \triangle U_j)$ logo:

$$\mu^*(A \triangle U) \le \sum_{j=1}^{+\infty} \mu^*(A_j \triangle U_j) = \varepsilon.$$

Isto mostra que $A \in \mathfrak{M}$, e $\mathfrak{M}$ é fechada para uniões numeráveis.

Se $A, B \in \mathfrak{M}$ então temos as decomposições

$$A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j, \qquad B = \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k,$$

onde $A_j, B_k \in \mathfrak{M}_F$. Como $\mathfrak{M}_F$ é uma álgebra, $A_j \cap B_k \in \mathfrak{M}_F$. Assim,

$$A \cap B = \bigcup_{j,k=1}^{+\infty} A_j \cap B_k \ \in \mathfrak{M}.$$

Logo $\mathfrak{M}$ também é fechada para intersecções. Deixamos como exercício verificar que $\mathfrak{M}$ é fechada para complementares, donde se segue que $\mathfrak{M}$ é uma $\sigma$-álgebra. $\square$

A função $\mu : \mathfrak{M} \to [0, +\infty]$ costuma designar-se por medida de Lebesgue. A classe $\mathfrak{M}$ dos conjuntos mensuráveis à Lebesgue é uma classe bastante ampla e inclui muitos dos conjuntos que nos são familiares. Por exemplo, como $\mathfrak{M}$ é uma $\sigma$-álgebra e contém os rectângulos $I \subset \mathbb{R}^n$, vemos que:

(i) $\mathfrak{M}$ contém os conjuntos abertos $O \subset \mathbb{R}^n$, pois todo o aberto de $\mathbb{R}^n$ é uma união numerável de rectângulos;

(ii) $\mathfrak{M}$ contém os conjuntos fechados $F \subset \mathbb{R}^n$, pois todo o conjunto fechado é o complementar de um conjunto aberto;

É claro que $\mathfrak{M}$ contém muitos outros conjuntos. Por exemplo, $\mathfrak{M}$ contém os conjuntos que antes designamos por *conjuntos de medida nula*, pois estes são de facto os conjuntos mensuráveis à Lebesgue com medida de Lebesgue nula.

### Problemas

**A.6.** *Demonstre as seguintes propriedades da medida exterior de Lebesgue:*

(a) $\mu^*(\emptyset) = 0$;
(b) $\mu^*(B) \leq \mu^*(A)$ *se* $B \subset A$;
(c) $\mu^*(I) = v(I)$ *se* $I \subset \mathbb{R}^n$ *é um rectângulo;*
(d) $\mu^*(x + A) = \mu^*(A)$ *se* $x \in \mathbb{R}^n$;
(e) $\mu^*(A) = 0$ *sse* $A$ *é um conjunto de medida nula;*

**A.7.** *Se* $A, B \subset \mathbb{R}^n$ *defina* $d(A, B) = \mu^*(A \bigtriangleup B)$. *Mostre que esta função satisfaz:*

(a) $d(A, B) \geq 0$ *e* $d(A, A) = 0$;
(b) $d(A, B) = d(B, A)$;
(c) $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$;
(d) $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq d(A, B)$, *se* $\mu^*(A), \mu^*(B) < +\infty$.

*O que é que pode dizer se* $d(A, B) = 0$?

**A.8.** *Mostre que:*

(a) *Se* $A \in \mathfrak{M}$ *e* $\mu^*(A) < +\infty$ *então* $A \in \mathfrak{M}_F$;
(b) *Se* $A \in \mathfrak{M}$ *então* $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ *com* $A_j \in \mathfrak{M}_F$ *disjuntos dois a dois;*
(c) *Se* $A_j \in \mathfrak{M}_F$ *então* $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}$.

**A.9.** *Verifique que o complementar dum conjunto mensurável à Lebesgue é mensurável à Lebesgue.*

**A.10.** *Considere conjuntos* $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ *onde cada* $A_i$ *é uma união finita de intervalos obtidos indutivamente da seguinte forma:* $A_0 = [0, 1]$ *e* $A_{i+1}$ *é obtido a partir de* $A_i$ *retirando o terço do meio de cada intervalo de* $A_i$. *Assim:*

$$\begin{aligned}
A_0 &= [0, 1];\\
A_1 &= [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1];\\
A_2 &= [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1];\\
&\vdots
\end{aligned}$$

*Mostre que o* ***conjunto de Cantor*** $C = \cap_{i=0}^{+\infty} A_i$ *é mensurável e não numerável. Qual é a sua medida de Lebesgue?*

**A.11.** *Mostre que o conjunto* $E$ *do exemplo A.7 não é mensurável à Lebesgue.*

**A.12.** *Mostre que um conjunto mensurável à Jordan é mensurável à Lebesgue. Será o inverso verdadeiro?*

## Funções Mensuráveis

**Definição A.11.** *Seja* $f : A \to \mathbb{R}$ *uma função definida num conjunto mensurável* $A \subset \mathbb{R}^n$. *Dizemos que* $f$ *é uma* ***função mensurável (à Lebesgue)*** *se o conjunto*

$$f^{-1}(]c, +\infty[) = \{x \in A : f(x) > c\}$$

*é mensurável para todo o* $c \in \mathbb{R}$.

**Exemplo A.12.** *Se* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua então* $f$ *é mensurável: como o conjunto* $]c, +\infty[$ *é aberto e* $f$ *é contínua sabemos que* $f^{-1}(]c, +\infty[)$ *é aberto, logo é mensurável.*

**Exemplo A.13.** *A função de Dirichelet*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \text{ é racional;} \\ 1, & \text{se } x \text{ é irracional.} \end{cases}$$

*é mensurável à Lebesgue (porquê?).*

**Proposição A.14.** *Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função definida num conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são todas equivalentes:*

(i) $\{x \in A : f(x) > c\}$ *é mensurável;*
(ii) $\{x \in A : f(x) \geq c\}$ *é mensurável;*
(iii) $\{x \in A : f(x) < c\}$ *é mensurável;*
(iv) $\{x \in A : f(x) \leq c\}$ *é mensurável;*

*Demonstração.* As relações:

$$\{x \in A : f(x) \geq c\} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \left\{x \in A : f(x) > c - \frac{1}{k}\right\}$$
$$\{x \in A : f(x) < c\} = A - \{x \in A : f(x) \geq c\}$$
$$\{x \in A : f(x) \leq c\} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \left\{x \in A : f(x) < c + \frac{1}{k}\right\}$$
$$\{x \in A : f(x) > c\} = A - \{x \in A : f(x) \leq c\}$$

mostram que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i). $\square$

**Exemplo A.15.**

Os próximos resultados permitem obter mais exemplos de funções mensuráveis.

**Proposição A.16.** *Se $f, f_1, f_2, \ldots$ são funções mensuráveis, então*

(i) $|f|$ *é mensurável;*
(ii) $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\lim_{n\to\infty} \sup f_n$ *e* $\lim_{n\to\infty} \inf f_n$ *são mensuráveis;*

*Demonstração.* A parte (i) segue-se da proposição anterior e da relação

$$\{x \in A : |f(x)| > c\} = \{x \in A : f(x) > c\} \cup \{x \in A : f(x) < -c\}.$$

Por outro lado, se $g(x) = \sup f_n(x)$, vemos que

$$\{x \in A : g(x) > c\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{x \in A : f_n(x) > c\}.$$

Assim $\sup f_n$ é mensurável. De igual modo mostra-se que $\inf f_n$ é mensurável. Como temos que

$$\lim_{n\to\infty} \sup f_n = \inf g_m$$

onde $g_m(x) = \sup \{f_n(x) : n \geq m\}$, vemos ainda que $\lim_{n\to\infty} \sup f_n$ é mensurável. De forma análoga mostra-se que $\lim_{n\to\infty} \inf f_n$ é mensurável. Portanto, (ii) também se verifica. $\square$

**Corolário A.17.** *Se $f, g$ são funções mensuráveis, então* $\max(f, g)$ *e* $\min(f, g)$ *são funções mensuráveis. Em particular,* $f^+ = \max(f, 0)$ *e* $f^- = -\min(f, 0)$ *são funções mensuráveis.*

**Corolário A.18.** *Se $f_1, f_2, \ldots$ são funções mensuráveis e $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, então $f$ é mensurável.*

Se $A$ é um conjunto mensurável designamos por $M(A)$ o conjunto das funções mensuráveis em $A$. O próximo resultado mostra que este conjunto é um espaço linear para as operações usuais de adição de funções e multiplicação de uma função por um número real.

**Teorema A.19.** *Sejam $f$ e $g$ funções mensuráveis, e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então a função*

$$h(x) = F(f(x), g(x))$$

*é mensurável. Em particular, $f + g$, $f - g$ e $f \cdot g$ também são mensuráveis.*

*Demonstração.* O conjunto $O_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) > c\}$ é aberto, pois $F$ é contínua, logo podemos escrever

$$O_c = \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k,$$

onde cada $I_k$ é um rectângulo aberto de $\mathbb{R}^2$:

$$I_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_k < x < b_k, c_k < y < d_k\}.$$

Como os conjuntos

$$\{x \in A : a_k < f(x) < b_k\} = \{x \in A : f(x) < b_k\} \cap \{x \in A : f(x) > a_k\}$$
$$\{x \in A : c_k < g(x) < d_k\} = \{x \in A : g(x) < b_k\} \cap \{x \in A : g(x) > a_k\}$$

são mensuráveis, segue-se que o conjunto

$$\{x \in A : (f(x), g(x)) \in I_k\} = \{x \in A : a_k < f(x) < b_k\} \cap \{x \in A : c_k < g(x) < d_k\}$$

é mensurável. Logo, também é mensurável o conjunto:

$$\{x \in A : F(f(x), g(x)) > c\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \{x \in A : (f(x), g(x)) \in I_k\}.$$

□

Vemos pois que as operações mais comuns da Análise, incluindo as passagens ao limite, quando aplicadas a funções mensuráveis resultam em funções mensuráveis. Assim, as funções que encontramos mais frequentemente são funções mensuráveis.([2])

A seguinte classe de funções desempenha um papel importante na teoria.

**Definição A.20.** *Um **função simples** é uma função $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cuja imagem é finita, i. e., $s(x)$ assume um número finito de valores.*

As funções constantes são funções simples. Se $A \subset \mathbb{R}^n$, então a função característica de $A$ dada por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A, \end{cases}$$

é uma função simples. Qualquer função simples $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma combinação linear de funções características. De facto, se Im $s = \{c_1, \ldots, c_m\}$, basta tomar

$$A_i = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) = c_i\}$$

de forma que

$$s = \sum_{i=1}^{m} c_i \chi_{A_i}.$$

Desta expressão, é claro que a função simples $s$ é mensurável sse os conjuntos $A_i$ são mensuráveis.

Qualquer função pode ser aproximada por funções simples. No caso de uma função mensurável, pudemos escolher funções simples mensuráveis.

---

[2]No entanto, deve-se observar que a composição de duas funções mensuráveis pode não ser mensurável, ou até que a composição de $f(g(x))$, onde $f$ é uma função mensurável e $g$ é uma função contínua, pode não ser uma função mensurável.

**Teorema A.21.** *Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função. Então existe uma sucessão $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de funções simples tais que*

$$\lim_{k\to\infty} s_k(x) = f(x), \qquad \forall x \in A.$$

*Temos ainda que:*

(i) *Se $f$ é mensurável, os $s_k$ podem ser escolhidos mensuráveis;*
(ii) *Se $f \geq 0$, podemos escolher $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sucessão monótona crescente:*

$$0 \leq s_1(x) \leq s_2(x) \leq \cdots \leq s_k(x) \leq \cdots \leq f(x), \qquad \forall x \in A.$$

*Demonstração.* Se $f \geq 0$ definimos, para cada $k = 1, 2, \ldots$, conjuntos

$$A_{kj} = \left\{ x \in A : \frac{j-1}{2^k} \leq f(x) \leq \frac{j}{2^k} \right\}, \qquad j = 1, \ldots, k2^k,$$
$$B_k = \{x \in A : f(x) \geq k\}.$$

Basta então tomar

$$s_k = \sum_{j=1}^{k2^k} \frac{j-1}{2^k} \chi_{A_{kj}} + k\chi_{B_k}.$$

No caso geral, escrevemos $f = f^+ - f^-$, com $f^+, f^- \geq 0$, e construimos sucessões de funções simples que convergem para $f^+$ e $f^-$.

□

## Problemas

**A.13.** *Seja $f \in M(A)$. Mostre que o conjunto*

$$\{x \in A : f(x) = c\}$$

*é mensurável para todo o real $c \in \mathbb{R}$.*

**A.14.** *Seja $f \in M(A)$. Mostre que se $B \subset A$ é mensurável então $f \in M(B)$.*

**A.15.** *Sejam $f, g \in M(A)$, e suponha que $g \neq 0$ em $A$. Mostre que a função $\frac{f}{g}$ é mensurável em $A$.*

**A.16.** *Seja $f$ uma função mensurável. Mostre que se $g(x) = f(x)$, excepto num conjunto de medida nula, então $g$ é mensurável.*

**A.17.** *Mostre que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona é mensurável.*

**A.18.** *Seja $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções mensuráveis. Mostre que o conjunto dos pontos onde $\{f_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge é mensurável.*

**A.19.** *Construa um exemplo de uma função $f$ para a qual não existe uma sucessão monótona crescente de funções simples $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} s_k = f$.*

**A.20.** *Mostre que se $f : A \to \mathbb{R}$ é limitada então existe uma sucessão $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de funções simples que converge uniformemente para $f$, i. e., tal que*

$$\lim_{k\to\infty} \sup \{|s_k(x) - f(x)| : x \in A\} = 0.$$

## Integração

Vamos agora definir o integral de Lebesgue de uma função mensurável sobre um conjunto mensurável, em situações bastante gerais.

Seja $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função simples mensurável, não negativa,

$$s(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i \chi_{A_i}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, c_i > 0.$$

Se $A \in \mathfrak{M}$ é um conjunto mensurável, definimos:

$$I_A(s) = \sum_{i=1}^{m} c_i \mu(A \cap A_i).$$

**Definição A.22.** *Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função mensurável, não-negativa, definida num conjunto mensurável. O* ***integral de Lebesgue*** *de $f$ em $A$ é:*

$$\int_A f d\mu = \sup \{I_A(s) : 0 \leq s \leq f \text{ é uma função simples, mensurável}\}$$

No caso de uma função simples $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ verifica-se facilmente que

$$\int_A s d\mu = I_A(s).$$

Uma vez definido o integral para uma função não-negativa podemos definir o integral para uma função mensurável através da decomposição $f = f^+ - f^-$, onde as componentes $f^\pm$ são as funções mensuráveis, não-negativas, definidas por:

$$f^+ = \max(f, 0), \qquad f^- = -\min(f, 0).$$

**Definição A.23.** *Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função mensurável, definida num conjunto mensurável. O* ***integral de Lebesgue*** *de $f$ em $A$ é*

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu,$$

*desde que pelo menos um dos integrais $\int_A f^\pm d\mu$ seja finito.*

Note que o integral de Lebesgue de uma função assume valores em $[-\infty, +\infty]$. Dizemos que $f : A \to \mathbb{R}$ é uma **função integrável** em $A$, e escrevemos $f \in \mathcal{L}(A)$ se o integral de Lebesge de $f$ existe e é finito.

Na proposição seguinte fornecemos algumas propriedades elementares do integral de Lebesgue. A sua demonstração fica como exercício.

**Proposição A.24.** *Seja $A$ um conjunto mensurável e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função mensurável.*

(i) *Se $f$ é limitada e $\mu(A) < +\infty$ então $f \in \mathcal{L}(A)$;*
(ii) *Se $f, g \in \mathcal{L}(A)$ e $f(x) \leq g(x)$ para $x \in A$ então*
$$\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu;$$
(iii) *Se $a \leq f(x) \leq b$ para $x \in A$ e $\mu(A) < +\infty$ então $f \in \mathcal{L}(A)$ e*
$$a\mu(A) \leq \int_A f d\mu \leq b\mu(A);$$
(iv) *Se $\mu(A) = 0$ então*
$$\int_A f d\mu = 0;$$
(v) *Se $f \in \mathcal{L}(A)$ e $B \subset A$ é mensurável então $f \in \mathcal{L}(B)$.*

Uma outra propriedade importante do integral de Lebesgue é a $\sigma$-aditividade em relação ao domínio de integração.

**Teorema A.25.** *Seja $f$ uma função mensurável não-negativa e $A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j$ uma união numerável de conjuntos mensuráveis, disjuntos dois a dois. Então*

$$\int_A f d\mu = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{A_j} f d\mu.$$

*Demonstração.* Pretende-se mostrar que a função $\phi : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(A) = \int_A f d\mu,$$

é uma função $\sigma$-aditiva.

Se $f = \chi_X$ é uma função característica dum conjunto mensurável $X$, então a $\sigma$-aditividade de $\phi$ não é mais que a $\sigma$-aditividade de $\mu$.

Se $f = s$ é uma função simples, mensurável, não-negativa, então $s = \sum_{k=1}^{m} c_i \chi_{X_k}$ com $c_i > 0$ e verifica-se também a $\sigma$-aditividade.

Seja então $f$ mensurável, não-negativa. Se $0 \leq s \leq f$ é uma função simples, mensurável, então

$$\int_A s d\mu = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{A_j} s d\mu \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{A_j} f d\mu,$$

logo $\phi$ é subaditiva:

$$\phi(A) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \phi(A_j).$$

Falta pois mostrar a desigualdade oposta. Como $\phi(A) \geq \phi(A_j)$ o resultado é verdadeiro se algum $\phi(A_j) = +\infty$. Podemos pois assumir que $\phi(A_j) < +\infty$, para todo o $j$. Então, para $N \in \mathbb{N}$ fixo, dado $\varepsilon > 0$ podemos escolher uma função simples $0 \leq s \leq f$, mensurável, tal que

$$\int_{A_j} s d\mu \geq \int_{A_j} f d\mu - \frac{\varepsilon}{N}, \qquad j = 1, \ldots, N.$$

Logo, vemos que

$$\phi(\bigcup_{j=1}^{N} A_j) \geq \int_{\bigcup_{j=1}^{N} A_j} s d\mu = \sum_{j=1}^{N} \int_{A_j} s d\mu \geq \sum_{j=1}^{N} \phi(A_j) - \varepsilon.$$

Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, esta desigualdade mostra que

$$\phi(\bigcup_{j=1}^{N} A_j) \geq \sum_{j=1}^{N} \phi(A_j).$$

Finalmente, observando que $A \supset \bigcup_{j=1}^{N} A_j$, obtemos

$$\phi(A) \geq \sum_{j=1}^{+\infty} \phi(A_j).$$

□

**Corolário A.26.** *Seja $A \in \mathfrak{M}$ e $B \subset A$ com $\mu(A - B) = 0$, então*

$$\int_A f d\mu = \int_B f d\mu$$

Este resultado mostra que os conjuntos de medida nula não contribuem para o valor do integral. Assim, na teoria da integração, é frequente estarmos interessados em afirmações $P(x)$ que são verdadeiras excepto possivelmente para $x \in N$, onde $N$ é um conjunto de medida nula. Dizemos nesse caso, que $P(x)$ *é verdadeira quase em toda a parte*, o que abreviamos para $P(x)$ *é verdadeira q.t.p.*

### Problemas

**A.21.** *Mostre que se $f \in \mathcal{L}(A)$ e $B \subset A$ é mensurável então $f \in \mathcal{L}(B)$.*

**A.22.** *Seja $A$ um conjunto mensurável e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Mostre que:*

(a) *Se $f, g \in \mathcal{L}(A)$ e $f(x) \leq g(x)$ para $x \in A$ então*

$$\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu;$$

(b) *Se $a \leq f(x) \leq b$ para $x \in A$ e $\mu(A) < +\infty$ então $f \in \mathcal{L}(A)$ e*

$$a\mu(A) \leq \int_A f d\mu \leq b\mu(A);$$

**A.23.** *Seja $A$ um conjunto mensurável e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Mostre que se $f \geq 0$ e $\int_A f d\mu = 0$ então $f(x) = 0$ q.t.p.*

**A.24.** *Se $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ é uma função tal que $\int_A f d\mu = 0$ para todo o $A \in \mathfrak{M}$, o que é que pode dizer sobre $f$?*

**A.25.** *Mostre que o teorema A.25 pode ser generalizado a funções $f \in \mathcal{L}(A)$.*

**A.26.** *Mostre que se $f \in \mathcal{L}(A)$ e $g(x) = f(x)$ q.t.p. em $A$, então $g \in \mathcal{L}(A)$ e*

$$\int_A g d\mu = \int_A f d\mu.$$

**A.27.** *Mostre que se $f \in \mathcal{L}(A)$ então $|f| \in \mathcal{L}(A)$ e*

$$\left| \int_A f d\mu \right| \leq \int_A |f| \, d\mu.$$

**A.28.** *Mostre que se $f$ é mensurável em $A$ e $|f| \leq g$ com $g \in \mathcal{L}(A)$ então $f \in \mathcal{L}(A)$.*

## Teoremas de Convergência

Uma das propriedades mais úteis do integral de Lebesgue é a possibilidade de, sob hipóteses bastante fracas, podermos trocar o sinal de integral e de limite:

$$\lim_{k \to +\infty} \int_A f_k d\mu = \int_A \lim_{k \to +\infty} f_k \; d\mu.$$

Nesta secção vamos estudar alguns resultados deste tipo.

**Teorema A.27.** ***(Teorema da Convergência Monótona de Levi)*** *Seja $A \in \mathfrak{M}$ e $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções mensuráveis em $A$ tais que*

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \qquad (x \in A).$$

*Se $f : A \to \mathbb{R}$ é tal que*

$$\lim_{k \to +\infty} f_k(x) = f(x), \qquad (x \in A),$$

*então*

$$\lim_{k \to +\infty} \int_A f_k d\mu = \int_A f d\mu.$$

*Demonstração.* Como $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f(x)$ para $x \in A$, vemos que existe $l \in [0, +\infty]$ tal que

$$\lim_{k \to +\infty} \int_A f_k d\mu = l \qquad \text{e} \qquad l \leq \int_A f d\mu.$$

Falta pois mostrar que $l \geq \int_A f d\mu$.

Seja $0 < c < 1$ e $0 \leq s \leq f$ uma função simples mensurável. Defina-se

$$A_k = \{x \in A : f_k(x) \geq cs(x)\} \qquad (k = 1, 2, \dots).$$

Como $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f(x)$ em $A$, vemos que $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ e

$$A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k,$$

Concluímos que, para todo o $k$,

$$\int_A f_k d\mu \geq \int_{A_k} f_k d\mu \geq c \int_{A_k} s d\mu.$$

Tomando $k \to +\infty$, podemos aplicar o teorema A.5 (pois o integral é $\sigma$-aditivo), para concluir que

$$l \geq c \int_A s d\mu.$$

Sendo $0 < c < 1$ arbitrário, isto mostra que

$$l \geq \int_A s d\mu,$$

para toda a função simples $0 \leq s \leq f$. Logo $l \geq \int_A f d\mu$, como pretendido. □

O exemplo seguinte mostra que os resultados de convergência obtidos não são válidos se substituirmos integral de Lebesgue por integral de Riemann.

**Exemplo A.28.** *Seja* $\{q_1, q_2, \dots\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ *uma enumeração dos racionais entre 0 e 1. Para cada* $k = 1, 2, \dots$, *defina-se* $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ *por*

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = \{q_1, \dots, q_k\}, \\ \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

*Então* $f(x) = \lim_{k \to +\infty} f_k$ *é a função de Dirichelet. Concluímos do teorema da convergência monótona que*

$$\int_{[0,1]} f d\mu = \lim_{k \to +\infty} \int_{[0,1]} f_k d\mu = 0,$$

*logo* $f$ *é integrável à Lebesgue.*

**Corolário A.29.** *Seja* $A$ *um conjunto mensurável. Então* $\mathcal{L}(A)$ *é um espaço vectorial e o integral* $\int : \mathcal{L}(A) \to \mathbb{R}$ *é uma transformação linear.*

*Demonstração.* É preciso mostrar que se $f, g \in \mathcal{L}(A)$, $c \in \mathbb{R}$, então $f + g, cf \in \mathcal{L}(A)$ e

$$\int_A (f+g) d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu,$$
$$\int_A cf d\mu = c \int_A f d\mu.$$

Limitamo-nos a demonstrar a primeira relação, deixando a segunda como exercício. Suponhamos primeiro que $f, g \geq 0$. Se $f, g$ são simples, então

$$\int_A (s_1 + s_2) d\mu = I_A(s_1 + s_2) = I_A(s_1) + I_A(s_2) = \int_A s_1 d\mu + \int_A s_2 d\mu.$$

Senão, pelo teorema A.21, podemos escolher sucessões monótonas de funções simples $\{s'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{s''_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que convergem para $f$ e $g$. Como

$$\int_A (s'_n + s''_n) d\mu = \int_A s'_n d\mu + \int_A s''_n d\mu,$$

passando ao limite, concluímos que

$$\int_A (f+g) d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu.$$

Para provar o caso geral consideram-se separadamente os conjuntos onde $f$ e $g$ têm sinal constante. □

Para obter um resultado de convergência para sucessões não-monótonas de funções precisamos do

**Lema A.30.** ***(Lema de Fatou)*** *Seja* $A \in \mathfrak{M}$ *e* $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *uma sucessão de funções não-negativas, mensuráveis em* $A$. *Se* $f : A \to \mathbb{R}$ *é tal que*

$$\lim_{k \to +\infty} \inf f_k(x) = f(x), \qquad (x \in A),$$

*então*

$$\lim_{k \to +\infty} \inf \int_A f_k d\mu \geq \int_A f d\mu.$$

*Demonstração.* Para cada $n = 1, 2, \ldots$, defina-se

$$g_m(x) = \inf\{f_k(x) : k \geq m\}, \qquad (x \in A).$$

Então $g_m$ é mensurável em $A$ e temos

$$0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \ldots \qquad \text{com } g_m(x) \to f(x) \quad (m \to +\infty).$$

Pelo teorema da convergência monótona, concluímos que

$$\lim_{m\to+\infty} \int_A g_m d\mu = \int_A f d\mu.$$

Como $f_m(x) \geq g_m(x)$ para $x \in A$, obtemos

$$\lim_{k\to+\infty} \inf \int_A f_k d\mu \geq \lim_{m\to+\infty} \int_A g_m d\mu = \int_A f d\mu.$$

□

Como mostra um exercício no final desta secção, a desigualdade do lema de Fatou pode ser estrita.

**Teorema A.31.** ***(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)*** *Seja $A \in \mathfrak{M}$ e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções mensuráveis em $A$. Se $f : A \to \mathbb{R}$ é tal que*

$$\lim_{k\to+\infty} f_k(x) = f(x), \qquad (x \in A),$$

*e existe $g \in \mathcal{L}(A)$ tal que*

$$|f_k(x)| \leq g(x), \qquad (x \in A),$$

*então*

$$\lim_{k\to+\infty} \int_A f_k d\mu = \int_A f d\mu.$$

*Demonstração.* Como $f_k$ e $f$ são mensuráveis e dominadas por uma função integrável, por um exercício da secção precedente, vemos que $f_k, f \in \mathcal{L}(A)$.

Como $f_k + g \geq 0$ o lema de Fatou mostra que

$$\int_A (f + g)\, d\mu \leq \lim_{k\to+\infty} \inf \int_A (f_k + g)\, d\mu,$$

ou seja

$$\int_A f d\mu \leq \lim_{k\to+\infty} \inf \int_A f_k d\mu.$$

Por outro lado, $g - f_k \geq 0$ logo, também pelo lema de Fatou,

$$\int_A (g - f)\, d\mu \leq \lim_{k\to+\infty} \inf \int_A (g - f_k)\, d\mu,$$

ou seja

$$-\int_A f d\mu \leq \lim_{k\to+\infty} \inf -\int_A f_k d\mu,$$

o que equivale a

$$\int_A f d\mu \geq \lim_{k\to+\infty} \sup \int_A f_k d\mu.$$

Assim, vemos que $\lim_{k\to+\infty} \int_A f_k d\mu$ existe e é igual a $\int_A f d\mu$. □

**Corolário A.32.** ***(Teorema da Convergência Limitada)*** *Se* $\mu(A) < +\infty$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sucessão limitada de funções mensuráveis em* $A$ *e* $f : A \to \mathbb{R}$ *é tal que*

$$\lim_{k\to+\infty} f_k(x) = f(x), \qquad (x \in A),$$

*então*

$$\lim_{k\to+\infty} \int_A f_k d\mu = \int_A f d\mu.$$

*Demonstração.* Por hipótese, existe $M > 0$ tal que $|f_k(x)| \leq M$ para $x \in A$. Como $\mu(A) < +\infty$, uma função constante em $A$ é integrável, logo podemos aplicar o teorema da convergência dominada. □

**Exemplo A.33.** *As funções*

$$f_k(x) = \frac{\cos^k(x)}{1+x^2}, \qquad x \in [0,\pi],$$

*formam uma sucessão limitada de funções mensuráveis e*

$$\lim_{k\to+\infty} f_k(x) = 0, \qquad x \neq 0, \pi.$$

*Pelo teorema da convergência limitada vemos que*

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{[0,\pi]} \frac{\cos^k(x)}{1+x^2} d\mu = \int_{[0,\pi]} \lim_{k\to+\infty} \frac{\cos^k(x)}{1+x^2} d\mu = 0.$$

## Problemas

**A.29.** *Seja* $g(x) = 0$ *para* $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ *e* $g(x) = 1$ *para* $\frac{1}{2} < x \leq 1$. *Defina uma sucessão de funções* $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ *por*

$$f_{2k}(x) = g(x),$$
$$f_{2k+1}(x) = g(1-x).$$

*Mostre que para esta sucessão a desigualdade do lema de Fatou é estrita.*

**A.30.** *Seja* $A \in \mathfrak{M}$ *e* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão de funções não-negativas, mensuráveis em* $A$. *Mostre que:*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_A f_k d\mu = \int_A \sum_{k=0}^{+\infty} f_k d\mu.$$

**A.31.** *Seja* $A \in \mathfrak{M}$ *e* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão de funções mensuráveis em* $A$. *Mostre que se existe* $g \in \mathcal{L}(A)$ *tal que* $\sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(x)| \leq g(x)$, *então:*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_A f_k d\mu = \int_A \sum_{k=0}^{+\infty} f_k d\mu.$$

**A.32.** *Se* $A$ *é mensurável, dizemos que* $f \in \mathcal{L}^2(A)$ *se* $f : A \to \mathbb{R}$ *é mensurável e*

$$\int_A |f|^2 \, d\mu < +\infty.$$

*Se* $f, g \in \mathcal{L}^2(A)$ *então define-se a* ***norma em*** $\mathcal{L}^2$ *por:*

$$\|f\| = \left(\int_A |f|^2 \, d\mu\right)^{\frac{1}{2}},$$

*e o* ***produto interno em*** $\mathcal{L}^2$ *por*

$$\langle f, g\rangle = \int_A fg d\mu.$$

*Mostre que:*

(a) *Se* $f \in \mathcal{L}^2(A)$ *e* $c \in \mathbb{R}$ *então* $\|cf\| = |c| \, \|f\|$;

(b) *Se* $f, g \in \mathcal{L}^2(A)$ *então* $fg \in \mathcal{L}(A)$ *e é válida a* ***desigualdade de Schwarz:***

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\| \, \|g\|;$$

(c) *Se* $f, g \in \mathcal{L}^2(A)$ *então* $f+g \in \mathcal{L}^2(A)$ *e é válida a* ***desigualdade triangular***

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

*O que é que pode dizer sobre* $f$ *se* $\|f\| = 0$*?*

## Relação com o Integral de Riemann

Vamos agora mostrar que o integral de Lebesgue é de facto uma extensão do integral de Riemann, i. e., que se $f : A \to \mathbb{R}$ é uma função integrável à Riemann então $f$ é integrável à Lebesgue e os dois integrais coincidem. Vemos pois que a teoria de Lebesgue permite estender a noção de integral a uma classe muito mais ampla de funções. Por outro lado, como o limite de funções integráveis à Riemann (mesmo funções contínuas) pode não ser integrável à Riemann, a teoria de Lebesgue resolve ainda muitos dos problemas com a passagem ao limite que ocorrem na teoria de integração.

**Teorema A.34.** *Seja* $f : A \to \mathbb{R}$ *uma função integrável à Riemann. Então* $f$ *é integrável à Lebesgue e*

$$\int_A f d\mu = \int_A f dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

*Demonstração.* Podemos assumir que $A \subset \mathbb{R}^n$ é um rectângulo limitado. Para $k = 1, 2, \dots$, existe uma partição $P_k$ de $A$ tal que

(a) $P_{k+1}$ é um refinamento de $P_k$;
(b) $\lim_{k\to+\infty} L(f, P_k) = \underline{\int}_A f$ e $\lim_{k\to+\infty} U(f, P_k) = \overline{\int}_A f$;

Sejam $U_k$ e $L_k$ funções simples tais que para todo o rectângulo $S$ de $P_k$ temos

$$L_k(x) = m_S(f) \qquad \text{e} \qquad U_k(x) = M_S(f) \qquad (x \in \text{int}S).$$

Então é claro que

$$L(f, P_k) = \int_A L_k d\mu, \qquad U(f, P_k) = \int_A U_k d\mu,$$

e por (a) vemos que

$$L_1(x) \leq L_2(x) \leq \dots \leq f(x) \leq \dots \leq U_2(x) \leq U_1(x) \qquad \text{(q.t.p. em } A).$$

Assim, existem funções mensuráveis

$$L(x) = \lim_{k\to+\infty} L_k(x), \qquad U(x) = \lim_{k\to+\infty} U_k(x), \qquad \text{(q.t.p. em } A),$$

tais que

$$L(x) \leq f(x) \leq U(x), \qquad \text{(q.t.p. em } A).$$

De (b) e pelo teorema da convergência monótona, concluímos que

$$\int_A L d\mu = \underline{\int}_A f dx, \qquad \int_A U d\mu = \overline{\int}_A f dx.$$

Se $f$ é integrável à Riemann, estes dois integrais são iguais. Logo, temos $U - L \geq 0$ q.t.p. em $A$, e

$$\int_A (U-L) d\mu = 0.$$

Isto mostra que $U = L$ q.t.p. em $A$. Então $f(x) = U(x) = L(x)$ q.t.p. em $A$, portanto $f$ é integrável à Lebesgue e

$$\int_A f d\mu = \int_A f dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

□

A relação entre o integral de Lebesgue e de Riemann, que acabámos de mostrar, também é útil no cálculo de integrais de Lebesgue, pois muitas funções integráveis são limites de funções contínuas e para estas sabemos calcular o seu integral de Riemann. Ilustramos esta técnica nos exemplos seguintes.

**Exemplo A.35.** *Seja $a > 0$ e consideremos a função $f(x) = \frac{1}{x^a}$ no intervalo $A = ]0,1[$. Para cada $k = 1, 2, \ldots$, as funções*

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^a} & \text{se } x \in [\frac{1}{k}, 1[, \\ 0 & \text{se } x \in ]0, \frac{1}{k}[, \end{cases}$$

*são limitadas e contínuas q.t.p., logo são integráveis à Riemann e*

$$\int_{]0,1[} f_k dx = \int_{\frac{1}{k}}^{1} \frac{1}{x^a} dx = \begin{cases} \frac{1}{a-1}\left(k^{a-1} - 1\right) & (a \neq 1), \\ \log k & (a = 1). \end{cases}$$

*Assim, vemos que $\{f_k\}$ é uma sucessão monótona de funções integráveis à Lebesgue, não-negativas, tais que*

$$f(x) = \lim_{k \to +\infty} f_k(x).$$

*Pelo teorema da convergência monótona, concluímos que*

$$\int_{]0,1[} \frac{1}{x^a} d\mu = \lim_{k \to +\infty} \int_{]0,1[} f_k dx = \begin{cases} \frac{1}{1-a} & \text{se } a < 1, \\ +\infty & \text{se } a \geq 1. \end{cases}$$

*Por exemplo, vemos que $\frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathcal{L}(]0,1[)$ mas $\frac{1}{\sqrt{x}} \notin \mathcal{L}^2(]0,1[)$.*

**Exemplo A.36.** *Para cada $y > 0$ consideremos a função $f : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = e^{-x} x^{y-1}.$$

*Afirmamos que $f \in \mathcal{L}(]0, +\infty[)$.*

*De facto, para $x \in ]0,1[$ temos que*

$$|f(x)| \leq x^{y-1}$$

*e, pelo exemplo precedente, a função $x^{y-1}$ é integrável se $y > 0$. Portanto, $f \in \mathcal{L}(]0,1[)$.*

*Para $x \geq 1$ a função $\exp(-x/2)x^{y-1}$ é contínua e tende para zero quando $x \to \infty$. Logo existe $M > 0$ tal que*

$$f(x) \leq M e^{-x/2} \qquad (x \geq 1),$$

*e basta verificar que $\exp(-x/2) \in \mathcal{L}([1, +\infty[)$. Defina-se $f_k : [1, +\infty[ \to \mathbb{R}$ por*

$$f_k(x) = \begin{cases} e^{-x/2} & \text{se } x \in [1, k], \\ 0 & \text{se } x \in ]k, +\infty[, \end{cases}$$

*Então $f_k$ é integrável à Riemann em $[1, k]$ e*

$$\int_{[1,+\infty[} f_k d\mu = \int_1^k e^{-x/2} dx = 2\left(e^{-1/2} - e^{-1/k}\right).$$

*Pelo teorema da convergência monótona, concluímos que $\exp(-x/2) \in \mathcal{L}([1, +\infty[)$ com*

$$\int_{[1,+\infty[} e^{-x/2} d\mu = \frac{2}{\sqrt{e}}.$$

*Concluímos ainda que $f \in \mathcal{L}(]0, +\infty[)$.*

*A **função gama** é a função $\Gamma : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\Gamma(y) = \int_{]0,+\infty[} e^{-x} x^{y-1} d\mu_x.$$

*Deixamos como exercício mostrar que $\Gamma(1) = 1$ e que esta função satisfaz a relação de recorrência*

$$\Gamma(y+1) = y\Gamma(y).$$

*Em particular, conclui-se que sobre os inteiros esta função coincinde com a função factorial:*

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

**Exemplo A.37.** *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função*

$$f(x, y) = e^{-\left(x^2+y^2\right)}.$$

*Definimos funções integráveis $f_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por*

$$f_k(x, y) = \begin{cases} e^{-\left(x^2+y^2\right)} & \text{se } (x, y) \in B_k(0), \\ \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin B_k(0) \end{cases}$$

*Então $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão monótona que converge pontualmente para $f$. Usando a fórmula de mudança de variáveis calculamos*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_k d\mu = \int_{B_k(0)} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^k e^{-r^2} r dr \right) d\theta = \pi \left( 1 - e^{-k^2} \right).$$

*Pelo teorema da convergência monótona, concluímos que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ e*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f d\mu = \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} f_k d\mu = \pi.$$

*Como*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f d\mu = \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} d\mu_x \right) \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} d\mu_y \right),$$

*obtemos*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} d\mu = \sqrt{\pi}.$$

## Problemas

**A.33.** *Calcule ou mostre que não existem os seguintes limites:*

(a) $\int_1^{+\infty} t \sin(\frac{1}{t}) - 1 \, dt$;
(b) $\lim_{k\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{t}{k}} \, dt$;
(c) $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x/n)}{1+x^2} \, dx$;
(d) $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \cos^n x \, dx$;
(e) $\int_B \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dxdy$ *onde* $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$.
(f) $\lim_{n\to+\infty} \int_B \frac{e^{\frac{x^2+y^2+z^2}{n}}}{x^2+y^2+z^2} dxdydz$ *onde* $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$.

**A.34.** *Seja $A \in \mathfrak{M}$ com $\mu(A) < +\infty$. Mostre que $\mathcal{L}^2(A) \subset \mathcal{L}(A)$. O que é que pode dizer se $\mu(A) = +\infty$?*

**A.35.** *Mostre que a função $\Gamma$ satisfaz:*

$$\Gamma(1) = 1, \qquad \Gamma(y + 1) = y\Gamma(y).$$

SUGESTÃO: *Aplique integração por partes ao integral*

$$\int_{\frac{1}{k}}^{k} e^{-x} x^y dx.$$

**A.36.** *Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defínda por*

$$g(t) = \int_0^{t^2} e^{tx^2} dx.$$

(a) *Mostre que $g$ é contínua;*
(b) *Mostre que $g$ é diferenciável;*
(c) *Calcule $g'(0)$.*

## Bibliografia

[1] M. Spivak, *Calculus on Manifolds*, Addison-Wesley,1992
[2] L. T. Magalhães, *Integrais Múltiplos*, 2ª Edição, Texto Editora, 1995.
[3] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw Hill, 1976.
[4] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill, 1986.
[5] A. Kolmogorov e S. Fomin, *Elementos da Teoria das Funções e de Análise Funcional*, MIR, 1982.
[6] F. Riesz e B. Nagy, *Functional Analysis*, Dover, 1990.