Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha 1

A entregar até à aula prática de sexta-feira dia 4 de Outubro

1. (a) Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diz-se *homogénea de grau* m se $f(t\mathbf{x}) = t^m f(\mathbf{x})$ para todo o $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Mostre que se f é diferenciável então

$$\sum_{i=1}^{n} x^i \partial_i f(\mathbf{x}) = m f(\mathbf{x}).$$

   (b) O *problema dos N corpos* consiste no cálculo das trajectórias de N partículas pontuais de massas $m_1, \ldots, m_N > 0$ e posições $\mathbf{x}_1 \equiv (x_1, y_1, z_1), \ldots, \mathbf{x}_N \equiv (x_N, y_N, z_N) \in \mathbb{R}^3$ sob a acção das atracções gravitacionais mútuas. Definindo $r_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$ e

$$U = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$$

   é possível escrever as equações diferenciais do movimento na forma

$$\ddot{q}_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

   onde $q = x, y, z$ e $i = 1, \ldots, N$. Use o resultado do exercício anterior para mostrar que o problema dos N corpos não possui soluções de equilíbrio, i.e., soluções para as quais todas as coordenadas q_i são constantes.

2. Mostre que uma função $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua *sse* a imagem inversa[1] de qualquer aberto é um aberto.

3. Para cada uma das seguintes funções $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ calcule o Jacobiano $J\mathbf{f}(\mathbf{x})$ e determine a imagem $\mathbf{f}(D)$. Determine um conjunto maximal[2] $S \subset D$ onde $\mathbf{f}$ é injectiva e dê uma expressão para a transformação inversa $\mathbf{f}^{-1} : \mathbf{f}(S) \to S$.

   (a) $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ e $\mathbf{f}(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$;

   (b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0$ e $y > 0\}$ e $\mathbf{f}(x, y) = \left(\log(xy), \frac{1}{x^2+y^2}\right)$.

Não precisam de entregar:

4. Seja X um espaço vectorial normado. Uma sucessão $x_n \in X$ diz-se uma *sucessão de Cauchy* se para todo o $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n > N$ se tem $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$. X diz-se *completo* se qualquer sucessão de Cauchy converge.

[1] A imagem inversa de um conjunto $C \subset B$ pela função $f : A \to B$ é o conjunto $f^{-1}(C) = \{x \in A : f(x) \in C\}$.

[2] Um conjunto diz-se maximal em relação a uma propriedade se não é subconjunto estrito de nenhum outro conjunto com a mesma propriedade.

(a) Sabendo que $\mathbb{R}$ é completo, mostre que $\mathbb{R}^n$ é completo.

(b) Dê um exemplo de um espaço normado que não seja completo.

(c) Mostre que se X é completo qualquer série absolutamente convergente converge.

(d) Mostre que se X é completo qualquer contracção $F : X \to X$ tem um e um só ponto fixo.

(e) Seja X o espaço vectorial das funções contínuas no intervalo $[0, \alpha]$ com a norma

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in [0,\alpha]} |x(t)|.$$

É possível mostrar que X é completo. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função *Lipschitziana*, i.e., para a qual existe $M > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Definimos a aplicação $F : X \to X$ mediante

$$F(x)(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))ds$$

com $x_0 \in \mathbb{R}$. Mostre F é uma contracção para $\alpha > 0$ suficientemente pequeno.

(f) Use a alínea anterior para mostrar que se f é Lipschitziana o *problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

possui solução única de classe C^1 num intervalo $[0, \alpha]$ para $\alpha > 0$ suficientemente pequeno.