

Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha 10

A entregar até à aula prática de sexta-feira dia 6 de Dezembro

1. Prove o *Segundo Teorema de Pappus*: se $C \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ é uma variedade-1 de comprimento finito, a superfície de revolução S gerada por C identificando \mathbb{R}^2 com o plano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ e rodando este plano em torno do eixo dos yy satisfaz

$$V_2(S) = 2\pi\bar{x}V_1(C),$$

onde \bar{x} é a coordenada x do centróide de A . Qual é a fórmula da área do toro?

2. Calcule a área, o centróide e o momento de inércia em relação ao eixo dos zz (em função da massa total M) das superfícies homogêneas seguintes:

- (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2 \text{ e } z \in [0, h]\}$, com $r, h > 0$;
(b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : rz = h(r - \sqrt{x^2 + y^2}) \text{ e } z \in [0, h]\}$, com $r, h > 0$;
(c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$, com $r > 0$.

3. Considere o campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$$

- (a) Calcule o integral de linha de \mathbf{F} ao longo da curva

$$C = \{(x, y, z) \in E^3 : x = \cos \theta, y = \sin \theta, z = 2\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

percorrida no sentido dos valores de z decrescentes sem usar o Teorema de Stokes.

- (b) Confirme o resultado da alínea anterior usando o Teorema de Stokes para variedades-1 com bordo.
(c) Calcule o fluxo de \mathbf{F} através da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in E^3 : z = x^2 + y^2 \leq 1\}$$

no sentido dos valores de z crescentes sem usar o Teorema de Stokes.

- (d) Confirme o resultado da alínea anterior usando o Teorema de Stokes para variedades-2 com bordo.
(e) Confirme os resultados das duas alíneas anteriores usando o Teorema da Divergência (i.e., o Teorema de Stokes para variedades-3 com bordo).

Não precisam de entregar:

4. Considere a variedade-2

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

- (a) Mostre que a parametrização $\mathbf{g} :]0, 2\pi[\times]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}^3$ que usa as coordenadas cilíndricas (θ, z) como parâmetros satisfaz

$$\mathbf{g}^* dV_2 = d\theta \wedge dz.$$

Isto significa que esta parametrização preserva áreas. A carta local associada a esta parametrização chama-se a *projecção cilíndrica*, e é frequentemente utilizada em cartografia.

- (b) A carta local mais usual em cartografia é a chamada *projecção de Mercator*, que corresponde a utilizar como parâmetros as funções (u, φ) , onde (θ, φ) são as habituais coordenadas esféricas, correspondentes à parametrização $\mathbf{g} :]0, \pi[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{g}(\theta, \varphi) = (\text{sen } \theta \cos \varphi, \text{sen } \theta \text{sen } \varphi, \cos \theta)$$

e

$$u(\theta) = \log |\text{cosec } \theta + \cotg \theta| = \log \left| \cotg \left(\frac{\theta}{2} \right) \right|.$$

Mostre que

$$\begin{pmatrix} g_{uu} & g_{u\varphi} \\ g_{\varphi u} & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sen}^2 \theta & 0 \\ 0 & \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Conclua que a projecção de Mercator preserva ângulos entre duas curvas (definidos como os ângulos entre os respectivos vectores tangentes).

- (c) Note que a projecção de Mercator associa as meridianos curvas de φ constante e aos paralelos curvas de u constante. Portanto uma linha recta na carta de Mercator corresponde a uma curva de rumo constante, dita uma *linha de rumo*, ou *curva loxodrómica* (descoberta por Pedro Nunes). Obtenha a expressão destas curvas em coordenadas locais (θ, φ) , e analise o seu comportamento na vizinhança dos pólos.