Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha 12

A entregar até à aula prática de sexta-feira dia 20 de Dezembro

1. Uma relação $\sim$ num conjunto A diz-se uma *relação de equivalência* se é

   (i) *Reflexiva:* $a \sim a$ para todo o $a \in A$;

   (ii) *Simétrica:* $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ para todo o $a, b \in A$;

   (iii) *Transitiva:* $a \sim b$ e $b \sim c \Rightarrow a \sim c$ para todo o $a, b, c \in A$.

   Uma relação de equivalência $\sim$ em A subdivide A em subconjuntos disjuntos, ditos *classes de equivalência*, onde a classe de equivalência de $a \in A$ é

   $$[a] = \{b \in A : b \sim a\}.$$

   Se $b \in [a]$, diz-se que b é um *representante* de $[a]$. Considere a seguinte relação em $\mathbb{R}$:

   $$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

   (a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência. Portanto $\sim$ subdivide $\mathbb{R}$ em classes de equivalência (todas elas densas em $\mathbb{R}$).

   (b) O *conjunto de Sierpinski* S é construido tomando exactamente um representante de cada classe de equivalência em $[0, 1]$. Se $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma enumeração de $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$, definimos $S_n = q_n + S$. Mostre que

   $$[0, 1] \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n \subset [-1, 2].$$

   (c) Mostre que o conjunto de Sierpinski não é mensurável.

   (d) Mostre que não existe nenhuma função $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ (onde $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ designa a família de todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$) que seja

      (i) σ-aditiva;

      (ii) Invariante por translacções (i.e., $\mu(x + A) = \mu(A)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$ e $A \subset \mathbb{R}$);

      (iii) Normalizada (i.e., $\mu([a, b]) = b - a$ para todo o $a, b \in \mathbb{R}$).

      Pode provar-se que os conjuntos mensuráveis à Lebesgue formam a maior σ-álgebra onde é possível definir uma função com estas propriedades.

2. Decida se as funções seguintes são ou não integráveis nos seus domínios, e calcule os respectivos integrais caso existam:

   (a) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$;

   (b) $g(x, y) = \dfrac{e^{-x^2-y^2}}{x^2 + y^2}$.

3. Usando
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$
e a Regra de Leibnitz calcule
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx$$
para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Não precisam de entregar:

4. A *função Gama* é definida pela fórmula[1]
$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt.$$
   (a) Mostre que esta função está bem definida para $x > -1$.
   (b) Mostre que
   $$\Gamma(x+1) = (x+1)\Gamma(x)$$
   e que
   $$\Gamma(0) = 1.$$
   Conclua que
   $$\Gamma(n) = n!$$
   para todo o $n \in \mathbb{N}$ (portanto a função gama pode ser vista como uma generalização da noção de factorial).
   (c) Mostre que $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
   (d) Usando coordenadas Cartesianas e coordenadas esféricas, mostre que
   $$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\mathbf{x}\|^2} dV_n = \pi^{\frac{n}{2}} = V_{n-1}(S^{n-1}) \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{n-1} dr,$$
   onde
   $$S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$
   Conclua que
   $$V_{n-1}(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)}.$$
   (e) Use o Teorema da Divergência para mostrar que
   $$V_n(B^n) = \frac{1}{n} V_{n-1}(S^{n-1}),$$
   onde
   $$B^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| < 1\}.$$
   Conclua que
   $$V_n(B^n) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)}.$$

[1] Na realidade a definição habitual é $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$, mas a definição acima é mais simples para os nossos propósitos.

(f) Seja

$$f(t) = x \log t - t$$

o logaritmo da integranda na definição da função Gama. Mostre que para $x > 0$ esta função tem um máximo para $t = x$, e que a sua expansão em série de Taylor em torno deste ponto é

$$f(t) = x \log x - x - \frac{(t-x)^2}{2x} + \ldots$$

Mostre que aproximando f pela sua expansão até à segunda ordem se obtém a fórmula aproximada

$$\Gamma(x) \simeq \left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-x}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2x}} du \simeq \left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2x}} du = \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x,$$

que é válida para $x >> 1$. Esta expansão assimptótica é exactamente a conhecida *fórmula de Stirling* para o factorial de um número inteiro:

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad (n >> 1).$$

5. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : A \to \mathbb{R}$ contínua q.t.p. em A e limitada em cada compacto contido em A. Seja $\mathcal{O}$ uma cobertura admissível de A e Φ uma partição da unidade para A subordinada a $\mathcal{O}$. Recorde que se diz que f é *integrável* em A se a série de termos não negativos

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi |f|$$

converge, e que se f é integrável, o seu *integral* é a soma da série absolutamente convergente

$$\int_A f = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi f.$$

Use o Teorema da Convergência Monótona para mostrar que se f é integrável neste sentido generalizado então $f \in L^1(A)$, e o Teorema da Convergência Dominada para mostrar que o integral definido desta forma coincide com o integral de Lebesgue de f.

6. Este exercício destina-se a provar o *Teorema da Esfera Penteada:* Se U é uma vizinhança aberta de

$$S^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

e $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^3$ é um campo vectorial de classe C^1 *tangente* a S^2, i.e., tal que $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}S^2$ para todo o $\mathbf{x} \in S^2$, então existe $\mathbf{x}_0 \in S^2$ tal que $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.

(a) Suponha que o teorema era falso. Justifique que nesse caso existiria um campo vectorial $\mathbf{G}$ tangente a S^2 tal que $\|\mathbf{G}(\mathbf{x})\| = 1$ para todo o $\mathbf{x} \in S^2$.

(b) Seja $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \to S^2$ a habitual função

$$\mathbf{g}(\theta, \varphi) = (\operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \cos\theta)$$

cujas restrições são parametrizações de S^2. Considere a função $\mathbf{H} : \mathbb{R}^3 \to S^2$ dada por

$$\mathbf{H}(t, \theta, \varphi) = \cos(t)\mathbf{g}(\theta, \varphi) + \operatorname{sen}(t)\mathbf{G}(\mathbf{g}(\theta, \varphi)),$$

e a forma de volume $\Omega_{\mathbf{E}}$ para S^2, onde

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}.$$

Recorde que $d\Omega_{\mathbf{E}} = 0$ em $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Considere a forma-2

$$\omega = \mathbf{H}^*\Omega_{\mathbf{E}}$$

e a variedade com bordo $[0,\pi] \times [0,\pi] \times [0,2\pi] \subset \mathbb{R}^3$. Use o Teorema de Stokes nesta variedade para mostrar que

$$\int_{\{0\}\times]0,\pi[\times]0,2\pi[^+} \omega = \int_{\{\pi\}\times]0,\pi[\times]0,2\pi[^+} \omega,$$

onde $+$ é a orientação induzida por $d\theta \wedge d\varphi$.

(c) Use a alínea anterior e os factos de $\mathbf{H}(0,\theta,\varphi) = \mathbf{g}(\theta,\varphi)$ e $\mathbf{H}(\pi,\theta,\varphi) = -\mathbf{g}(\theta,\varphi)$ para obter uma contradição.