

# Análise Matemática III - Turma Especial

## Ficha 3

*A entregar até à aula prática de sexta-feira dia 18 de Outubro*

1. Para cada um dos seguintes conjuntos  $M \subset \mathbb{R}^n$ , indique se  $M$  é ou não uma variedade. Caso não seja, indique um subconjunto maximal de  $M$  que seja variedade e contenha o ponto  $\mathbf{x}$  indicado. Em qualquer dos casos, indique a dimensão  $m$  da variedade escreva a equação do plano  $m$ -dimensional tangente a  $M$  no ponto  $\mathbf{x}$ .
  - (a)  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x| \text{ e } |x| \leq 2\}$ ,  $\mathbf{x} = (1, 1)$ ;
  - (b)  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 25 \text{ e } x^2 - 2xy + y^2 = 0\}$ ,  $\mathbf{x} = (3, 3, 4)$ ;
  - (c)  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ ,  $\mathbf{x} = (3, 4, 5)$ ;
  - (d)  $M = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 - z^2 - w^2 + 1 = 0\}$ ,  $\mathbf{x} = (1, 0, 1, 1)$ .
2. (a) Prove o Teorema de Weierstrass: se  $K \subset \mathbb{R}^n$  é compacto (i.e., limitado e fechado) e  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua então  $f$  tem máximo e mínimo em  $K$ .  
(b) Determine o máximo e o mínimo da função contínua  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x}$  no compacto  $K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ , onde  $A$  é uma matriz  $n \times n$  simétrica.
3. Dados  $n$  números reais não negativos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , define-se a sua *média aritmética* como sendo o número real  $\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$  e a sua *média geométrica* como sendo o número real  $(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}$ . Mostre que a média aritmética é sempre maior ou igual que a média geométrica, e que as duas são iguais sse  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

**Não precisam de entregar:**

4. Dê um exemplo de uma variedade  $M$  de dimensão 1 em  $\mathbb{R}^2$  para a qual não existe nenhuma função  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  tal que  $M = F^{-1}(0)$ .
5. O espaço vectorial  $M_3(\mathbb{R})$  das matrizes  $3 \times 3$  de entradas reais pode ser identificado com  $\mathbb{R}^9$  de forma natural. Considere o subconjunto de  $\mathbb{R}^9$

$$O(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) : A^t A = I\}$$

formado pelas matrizes  $3 \times 3$  ortogonais.

- (a) Mostre que  $O(3)$  é uma variedade de dimensão 3 e classe  $C^\infty$  compacta<sup>1</sup>.
- (b) Mostre que  $T_I O(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) : A^t + A = 0\}$ .
- (c) Mostre que  $O(3)$  com a operação produto de matrizes é um grupo não comutativo<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Uma variedade diz-se compacta se é um subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$ .

<sup>2</sup>Portanto  $O(3)$  é uma variedade com estrutura de grupo (*grupo de Lie*).

6. **(Critério de segunda ordem):** Seja  $M$  uma variedade de dimensão  $m$  e classe  $C^2$  em  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$  e  $\mathbf{x}_0 \in M$  tal que a restrição de  $f$  a  $M$  possui um mínimo em  $\mathbf{x}_0$ . Seja  $U \ni \mathbf{x}_0$  um aberto e  $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  tais que

$$M \cap U = \{\mathbf{x} \in U : \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-m} \in \mathbb{R}$  tais que a função  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \lambda_1 F^1(\mathbf{x}) + \dots + \lambda_{n-m} F^{n-m}(\mathbf{x})$$

satisfaz  $\nabla g(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ . Mostre a forma quadrática definida pela matriz Hessiana  $Hg(\mathbf{x}_0)$  é necessariamente semidefinida positiva quando restrita a  $T_{\mathbf{x}_0}M$ .