Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha 5

A entregar até à aula teórica de terça-feira dia 5 de Novembro

1. Escreva cada um dos integrais seguintes pela ordem de integração inversa[1] e depois calcule-o usando uma mudança de coordenadas apropriada.

   (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}dzdydx;$

   (b) $\displaystyle\int_{-a}^{a}\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}1dzdydx$ (com $a,b,c>0$);

   (c) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\int_{0}^{x^2+y^2+z^2}1dwdzdydx.$

2. Prove o *Primeiro Teorema de Pappus:* se $A\subset\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0\}$ é mensurável à Jordan, o sólido de revolução S gerado por A identificando $\mathbb{R}^2$ com o plano $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=0\}$ e rodando este plano em torno do eixo dos yy é mensurável à Jordan e

$$V_3(S)=2\pi\overline{x}V_2(A),$$

   onde $\overline{x}$ é a coordenada x do centróide de A. Qual é a fórmula do volume do toro?

3. Seja $A\subset\mathbb{R}^n$ mensurável à Jordan. O *cone de base A e vértice $h\mathbf{e}_{n+1}$* é o conjunto

$$C=\{(a^1(1-t),\ldots,a^n(1-t),ht)\in\mathbb{R}^{n+1} : (a^1,\ldots,a^n)\in A \text{ e } t\in[0,1]\}.$$

   (a) Mostre que C é mensurável à Jordan e que

$$V_{n+1}(C)=\frac{h}{n+1}V_n(A).$$

   (b) Calcule o volume do conjunto

$$\{(x^1,\ldots,x^n)\in\mathbb{R}^n : |x^1|+\ldots+|x^n|\leq a\},$$

   onde $a>0$.

Não precisam de entregar:

4. (a) Mostre que se um conjunto mensurável à Jordan $A\subset\mathbb{R}^n$ tem medida nula então $V_n(A)=0$.

   (b) Mostre que o conjunto de Cantor é compacto e mensurável à Jordan.

[1] A ordem de integração inversa da de $\int\int\ldots\int dx^1dx^2\ldots dx^n$ é a de $\int\ldots\int\int dx^n\ldots dx^2dx^1$.

(c) Dê um exemplo de um conjunto compacto que não seja mensurável à Jordan.

5. Mostre que se $A \subset \mathbb{R}^n$ tem medida nula e $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 então $\mathbf{g}(A)$ tem ainda medida nula.

6. Este exercício destina-se a provar o *Teorema de Sard:* Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, $\mathbf{g} : A \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 e
$$B = \{\mathbf{x} \in A : J\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0\}$$
então $\mathbf{g}(B)$ tem medida nula.

   Seja $K \subset A$ um n-cubo compacto de lado $l > 0$ com $K \cap B \neq \varnothing$. Dado $\varepsilon > 0$, escolha-se $N \in \mathbb{N}$ e divida-se K em N^n n-subcubos de lado l/N. Seja S um n-subcubo genérico, e tome-se $\mathbf{x} \in S$.

   (a) Mostre que para N suficientemente grande
   $$\|D\mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\| \leq \varepsilon \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$
   para todo o $\mathbf{y} \in S$ e todo o n-subcubo $S \subset K$.

   (b) Suponha que $\mathbf{x} \in S \cap B \neq \varnothing$. Mostre que existe um subespaço $V \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão $n-1$ tal que
   $$\{D\mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) : \mathbf{y} \in S\} \subset V.$$

   (c) Mostre que a distância de qualquer ponto de $\mathbf{g}(S)$ ao plano $\mathbf{g}(\mathbf{x}) + V$ é menor que $\varepsilon\sqrt{n}l/N$.

   (d) Mostre que existe $M > 0$ tal que para todo o $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ se tem
   $$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\| \leq M \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

   (e) Conclua que se $S \cap B \neq \varnothing$ então $\mathbf{g}(S)$ está contido num cilindro de altura $< 2\varepsilon\sqrt{n}l/N$ e base a bola $(n-1)$-dimensional de raio $< M\sqrt{n}l/N$. Conclua que $\mathbf{g}(K \cap B)$ tem medida nula, e que portanto $\mathbf{g}(B)$ tem medida nula.