Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha 6

A entregar até à aula prática de sexta-feira dia 8 de Novembro

1. Calcule o volume, o centróide e o momento de inércia em relação ao eixo dos zz (em função da massa total M) dos sólidos homogéneos seguintes:

   (a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq r^2 \text{ e } z \in [0,h]\}$, com $r, h > 0$;

   (b) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq rz \leq h(r - \sqrt{x^2+y^2})\right\}$, com $r, h > 0$;

   (c) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$, com $a, b, c > 0$.

2. Os *versores das coordenadas polares* são os campos vectoriais definidos em cada ponto $(x,y) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ por

$$\mathbf{e}_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta);$$
$$\mathbf{e}_\theta = \frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta).$$

   Deste modo, a expressão da transformação de coordenadas $(x,y) = \mathbf{g}(r,\theta)$ é

$$(x,y) \equiv \mathbf{x} = r\mathbf{e}_r.$$

   (a) Mostre que se $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ é um caminho diferenciável representando a trajectória de uma partícula em $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ se tem

$$\ddot{\mathbf{x}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta$$

   (b) Supondo $\dot{\theta} > 0$, mostre que a área varrida pelo vector $\mathbf{x}(t)$ entre os instantes t_0 e t é

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{2} r^2(s)\dot{\theta}(s)ds.$$

   (c) Prove a *Segunda Lei de Kepler:* se $\ddot{\mathbf{x}}$ é *radial* (i.e., se $\ddot{\mathbf{x}}(t) = a(t)\mathbf{e}_r(t)$) então $\dot{A}$ é constante.

3. Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo compacto e $f : I \times]a,b[\to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que $F :]a,b[\to \mathbb{R}$ dada por

$$F(t) = \int_I f(\mathbf{x},t)dV_n(\mathbf{x})$$

   é contínua.

4. Use a Regra de Leibnitz para provar o Lema de Schwarz.

Não precisam de entregar:

5. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $\mathcal{O}$ uma cobertura admissível de A, Φ uma partição da unidade subordinada a $\mathcal{O}$, $f : A \to \mathbb{R}$ uma função integrável, $\mathbf{g} : A \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação injectiva de classe C^1 e
$$B = \{\mathbf{x} \in A : J\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0\}.$$
Recorde que, pelo teorema de Sard, $D = \mathbf{g}(B)$ tem medida nula.

   (a) Mostre que se $B = \varnothing$ então $C = \mathbf{g}(A)$ é aberto. Na realidade é possível mostrar que C é aberto mesmo quando $B \neq \varnothing$ (ou mesmo quando $\mathbf{g}$ é apenas contínua - *Teorema de Invariância do Domínio*).

   (b) Mostre que $C \setminus D$ é aberto e que $C \cap \partial D \subset D$. Conclua para cada $\varphi \in \Phi$ as funções $\varphi f \chi_D$ e $\varphi |f| \chi_D$ são integráveis à Riemann com integral zero, e que portanto $f\chi_D$ é integrável com integral zero.

   (c) É possível provar que
$$\int_C f\chi_{C\setminus D} = \int_{C\setminus D} f.$$
Use este resultado para mostrar que
$$\int_C f = \int_A (f \circ \mathbf{g})|J\mathbf{g}|.$$