Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha 7

A entregar até à aula prática de sexta-feira dia 15 de Novembro

1. Considere as seguintes formas diferenciais:

$$\begin{aligned}
&\alpha = xdx + ydy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2);\\
&\beta = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\});\\
&\omega = e^{xz}dx + x\cos z dy + y^2 dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3);\\
&\eta = xdx \wedge dy - zdx \wedge dz + xyzdy \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3);\\
&\zeta = dx^1 \wedge dx^2 + \ldots + dx^{2n-1} \wedge dx^{2n} \in \Omega^2(\mathbb{R}^{2n}).
\end{aligned}$$

Considere ainda as seguintes funções C^∞:

$\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\mathbf{f}(t) = (t, t^2)$;
$\mathbf{g} :]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$ definida por $\mathbf{g}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$;
$\mathbf{h} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{h}(u, v, w) = (uv, vw, uw)$.

Calcule:

(a) $\alpha \wedge \beta$, $\omega \wedge \eta$, $\eta \wedge \eta$;
(b) $\zeta \wedge \ldots \wedge \zeta$ (produto exterior com n factores);
(c) $d\alpha, d\beta, d\omega, d\eta, d\zeta$.
(d) $\mathbf{f}^*\alpha, \mathbf{g}^*\alpha, \mathbf{g}^*\beta, \mathbf{h}^*\eta$

2. Dado um vector

$$\mathbf{v} = v^1\mathbf{e}_1 + \ldots + v^n\mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$$

definimos o covector-1

$$\omega_{\mathbf{v}} = v^1dx^1 + \ldots + v^ndx^n$$

e o covector-$(n-1)$

$$\Omega_{\mathbf{v}} = v^1dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n - \ldots + (-1)^{n-1}v^ndx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1}.$$

Mostre que:

(a) $\omega_{\mathbf{v}} \wedge \Omega_{\mathbf{w}} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$.
(b) Se $n = 3$,

$$\omega_{\mathbf{v}} \wedge \omega_{\mathbf{w}} = \Omega_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}},$$

onde $\times$ designa o produto externo de vectores em $\mathbb{R}^3$.

(c) $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ são linearmente dependentes *sse*

$$\omega_{\mathbf{v}_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{\mathbf{v}_k} = 0.$$

(**Sugestão:** *Poderá ser útil mostrar que $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ são linearmente dependentes* sse *a matriz $k \times k$ dada por $g = (g_{ij}) = (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j)$ é singular; note que pode sempre escrever a matriz g como $g = V^t V$, onde V é a matriz cujas colunas são $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$*).

(d) O *produto externo* em $\mathbb{R}^n$ é a operação $(n-1)$-ária que associa a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ o vector $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 \times \ldots \times \mathbf{v}_{n-1}$ definido por

$$\Omega_{\mathbf{w}} = \omega_{\mathbf{v}_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{\mathbf{v}_{n-1}}.$$

Mostre que $\mathbf{v}_1 \times \ldots \times \mathbf{v}_{n-1}$ é ortogonal a cada um dos seus factores.

3. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um campo escalar e $\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo vectorial. Mostre que:

(a) $df = \omega_{\nabla f}$, onde

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x^1}\mathbf{e}_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}\mathbf{e}_n$$

é o *gradiente* de f.

(b) $d\Omega_{\mathbf{v}} = (\nabla \cdot \mathbf{v}) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$, onde

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v^1}{\partial x^1} + \ldots + \frac{\partial v^n}{\partial x^n}$$

é a *divergência* de $\mathbf{v}$.

Suponha agora que $n = 3$. Mostre que:

(c) $d\omega_{\mathbf{v}} = \Omega_{\nabla \times \mathbf{v}}$, onde

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v^3}{\partial y} - \frac{\partial v^2}{\partial z}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial v^1}{\partial z} - \frac{\partial v^3}{\partial x}\right)\mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial v^2}{\partial x} - \frac{\partial v^1}{\partial y}\right)\mathbf{e}_3$$

é o *rotacional* de $\mathbf{v}$.

(d) $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$.

(e) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$.

Não precisam de entregar:

4. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável à Jordan. Mostre que $\operatorname{int}(A)$ e $\overline{A}$ são também mensuráveis à Jordan, e que

$$V_n(\operatorname{int}(A)) = V_n(\overline{A}) = V_n(A).$$