# Análise Matemática III - Turma Especial

## Ficha 8

*A entregar até à aula prática de sexta-feira dia 22 de Novembro*

1. Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ abertos, $f : V \to \mathbb{R}$, $\mathbf{g} : U \to V$ funções $C^\infty$ e
$$\omega(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y})dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n \in \Omega^n(V).$$
Mostre que
$$\mathbf{g}^*\omega(\mathbf{x}) = f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))J\mathbf{g}(\mathbf{x})dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

2. O *paralelepípedo-$k$* gerado pelos vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ é o conjunto
$$P(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \left\{ t^1\mathbf{v}_1 + \ldots + t^k\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n : t^1, \ldots, t^k \in [0, 1] \right\}.$$
   (a) Mostre que o paralelepípedo-$n$ gerado por $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ é Jordan-mensurável e
   $$V_n(P(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)) = |\det(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)|.$$
   (b) O *volume-$k$* de $P(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) \subset \mathbb{R}^n$ define-se do seguinte modo: o plano coordenado
   $$\pi_k = \left\{ \left(x^1, \ldots, x^n\right) \in \mathbb{R}^n : x^{k+1} = \ldots = x^n = 0 \right\}$$
   pode ser identificado com $\mathbb{R}^k$ de forma natural. Se $A$ é uma matriz ortogonal tal que $A \cdot P(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) \subset \pi_k$, definimos
   $$V_k(P(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)) = V_k(A \cdot P(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)),$$
   onde o lado direito da igualdade está bem definido devido à identificação de $\pi_k$ com $\mathbb{R}^k$. Mostre que
   $$V_k(P(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)) = (\det g)^{\frac{1}{2}},$$
   onde $g$ é a matriz $k \times k$ definida por
   $$g_{ij} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$$
   (portanto o volume-$k$ não depende da escolha de $A$).
   (c) Mostre que
   $$V_k(P(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)) = \left[\omega_{\mathbf{v}_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{\mathbf{v}_k}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)\right]^{\frac{1}{2}}.$$
   (d) Mostre que
   $$\omega_{\mathbf{v}_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{\mathbf{v}_n} = \det(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$
   Conclua que
   $$V_{n-1}(P(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1})) = \|\mathbf{v}_1 \times \ldots \times \mathbf{v}_{n-1}\|.$$
   (**Sugestão:** *Faça*
   $$\mathbf{v}_n = \frac{\mathbf{v}_1 \times \ldots \times \mathbf{v}_{n-1}}{\|\mathbf{v}_1 \times \ldots \times \mathbf{v}_{n-1}\|}).$$

(e) Mostre que

$$\mathbf{v}_1 \times \ldots \times \mathbf{v}_{n-1} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \ldots & \mathbf{e}_n \\ v_1^1 & \ldots & v_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n-1}^1 & \ldots & v_{n-1}^n \end{bmatrix}.$$

3. Decida se as seguintes formas diferenciais definidas em $\mathbb{R}^3$ são ou não exactas. Em caso afirmativo, calcule um potencial.

   (a) $yzdx + xzdy + xydz$;

   (b) $zdx \wedge dy - ydx \wedge dz + xdy \wedge dz$;

   (c) $2dx \wedge dy + yzdx \wedge dz + xzdy \wedge dz$;

   (d) $x^2ye^zdx \wedge dy \wedge dz$.

   (**Sugestão:** *Note que se $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ é exacta e $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ é um potencial, $\alpha + df$ é ainda um potencial, qualquer que seja a função $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^3)$; use este facto para mostrar que é sempre possível escolher um potencial para $\omega$ em que uma das componentes é nula*).

4. Determine os espaços tangentes às variedades seguintes nos pontos indicados utilizando parametrizações convenientes:

   (a) $M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$ no ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

   (b) $M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } x = y\right\}$ no ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

   (c) $M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2\right)^2 + z^2 = 1\right\}$ no ponto $\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}, \frac{5\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

   **Não precisam de entregar:**

5. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $\omega \in \Omega^k(U)$, $\eta \in \Omega^l(U)$, $\mathbf{f} : V \subset \mathbb{R}^m \to U$ e $\mathbf{g} : W \subset \mathbb{R}^p \to V$ funções de classe $C^\infty$ definidas em abertos. Prove as seguintes propriedades:

   (a) $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}\eta \wedge \omega$;

   (b) $\mathbf{f}^*(\omega \wedge \eta) = (\mathbf{f}^*\omega) \wedge (\mathbf{f}^*\eta)$;

   (c) $\mathbf{g}^*(\mathbf{f}^*\omega) = (\mathbf{f} \circ \mathbf{g})^*\omega$.

6. Considere uma mudança de coordenadas linear em $\mathbb{R}^n$, definida por

$$\overline{\mathbf{e}}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_j.$$

   (a) Mostre que

$$\sum_{i=1}^{n} x^i\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}^i\overline{\mathbf{e}}_i$$

*sse*

$$\overline{x}^i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x^j,$$

onde $(b_{ij}) = (a_{ji})^{-1}$.

(b) Mostre que se $\{d\overline{x}^1, \ldots, d\overline{x}^n\}$ é a base dual de $\{\overline{\mathbf{e}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{e}}_n\}$, então

$$d\overline{x}^i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} dx^j.$$

É por este motivo que os covectores se dizem tensores *covariantes*.

(c) Mostre que o dual dos espaço dos covectores-$1$, $((\mathbb{R}^n)^*)^*$, pode ser naturalmente identificado com $\mathbb{R}^n$. Portanto os vectores podem também ser vistos como aplicações lineares definidas no espaço dos covectores-$1$, ditas *tensores contravariantes*.

(d) Defina produto tensorial de dois vectores, e produto tensorial de um covector por um vector.

(e) Defina tensores de tipo $(p, q)$, i.e., tensores $p$ vezes covariantes e $q$ vezes contravariantes, e indique uma base. Indique como é que os elementos da base se transformam sob uma mudança linear de coordenadas.

(f) Mostre que os tensores de tipo $(1, 1)$ podem ser identificados com o espaço das aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^n$.