Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha 9

A entregar até à aula prática de sexta-feira dia 29 de Novembro

1. Diz-se que um covector-m $\omega \in \Lambda^m(\mathbb{R}^n)$ *orienta* o subespaço $V \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão m se existe uma base $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ para V tal que

$$\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m) \neq 0.$$

Diz-se que a base é *positivamente orientada* se $\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m) > 0$, e *negativamente orientada* se $\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m) < 0$.

   (a) Mostre que se ω orienta V e $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ é outra qualquer base para V então $\omega(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m) \neq 0$. Mostre ainda que as duas bases têm a mesma orientação *sse* o determinante da matriz de mudança de base é positivo.

   (b) Mostre que uma variedade-m $M \subset \mathbb{R}^n$ é orientável *sse* existe uma forma-m $\mu \in \Omega^m(\mathbb{R}^n)$ que orienta todos os espaços tangentes a M, e que uma parametrização $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^m \to M \cap U$ é compatível com μ *sse* a base $\{\partial_1 \mathbf{g}, \ldots, \partial_m \mathbf{g}\}$ para $T_{\mathbf{g}(\mathbf{t})}M$ é positivamente orientada para todo o $\mathbf{t} \in V$.

   (c) A *banda de Möbius* é a variedade-2 que é a imagem de $\mathbf{g} :]-1,1[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{g}(t,\varphi) = \left(\left(1 + t\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\cos\varphi, \left(1 + t\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\operatorname{sen}\varphi, t\operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)$$

   Mostre que a banda de Möbius não é orientável.

2. Use o Teorema Fundamental do Cálculo para mostrar que se a função contínua $\mathbf{g} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é uma parametrização quando restrita a $]a,b[$ e $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é C^1, onde U é uma vizinhança aberta de $\mathbf{g}([a,b])$, então

$$\int_{\mathbf{g}(]a,b[)^+} df = f(\mathbf{g}(b)) - f(\mathbf{g}(a)),$$

onde $+$ designa a orientação compatível com $\mathbf{g}$. Conclua que a forma-1 fechada

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

não é exacta em $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

3. Calcule $\int_{M^\mu} \omega$, onde

   (a) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1 \text{ e } x = z\}$, $\mu = dz$ no ponto $(0,1,0)$ e $\omega = ydx + xdy + zdz$;

   (b) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 9\}$, $\mu = dy \wedge dz$ no ponto $(3,0,0)$ e $\omega = dx \wedge dy$;

(c) $M = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x^2+y^2 = 1 \text{ e } z^2+w^2 = 1\}$, $\mu = dy \wedge dw$ no ponto $(1,0,1,0)$ e $\omega = ywdx \wedge dz + xzdy \wedge dw - yzdx \wedge dw - xwdy \wedge dz$.

4. Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ abertos, $M \subset U$ uma variedade-m orientável e $\omega \in \Omega^m(V)$. Seja $\mathbf{g} : U \to V$ um *difeomorfismo* (i.e., uma aplicação bijectiva, diferenciável, com inversa diferenciável) de classe C^∞. Mostre que $\mathbf{g}(M)$ é uma variedade-m orientável e que

$$\int_{\mathbf{g}(M)^\mu} \omega = \int_{M^{\mathbf{g}^*\mu}} \mathbf{g}^*\omega.$$

Mostre que no entanto não é em geral verdade que

$$\int_{\mathbf{g}(M)} f dV_m = \int_M (f \circ \mathbf{g}) dV_m.$$

Não precisam de entregar:

5. (a) Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade-m e $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^m \to M \cap U$ uma parametrização. Mostre que

$$\mathbf{g}^* \left(\omega_{\partial_1 \mathbf{g}} \wedge \ldots \wedge \omega_{\partial_m \mathbf{g}}\right) = \det\left(g_{ij}\right) dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^m,$$

onde

$$g_{ij} = \partial_i \mathbf{g} \cdot \partial_j \mathbf{g}.$$

Porque é que isto implica que $M \cap U$ é orientável?

(b) Seja agora $m = n-1$, e suponha que existe um vector normal unitário $\mathbf{n} : M \to \mathbb{R}^n$ contínuo. Mostre que

$$\mathbf{g}^* \Omega_{\mathbf{n}} = \det\left(\mathbf{n}, \partial_1 \mathbf{g}, \ldots, \partial_{n-1} \mathbf{g}\right) dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^{n-1}.$$

Porque é que isto implica que $M \cap U$ é orientável?

(c) Mostre que uma variedade-$(n-1)$ é orientável *sse* possui um vector normal unitário contínuo.

6. Diz-se que um difeomorfismo $\mathbf{g} : U \subset \mathbb{R}^m \to V \subset \mathbb{R}^m$ *preserva orientações* se $J\mathbf{g} > 0$, e que *inverte orientações* se $J\mathbf{g} < 0$. Mostre que uma variedade-m é orientável *sse* é possível cobrir M com vizinhanças de coordenadas tais que as respectivas mudanças de carta preservam orientações.

7. A *garrafa Klein* é a variedade-2 que é a imagem de $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$\mathbf{g}(\theta, \varphi) = \left((R + r\cos\varphi)\cos\theta, (R + r\cos\varphi)\operatorname{sen}\theta, r\operatorname{sen}\varphi\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

onde $R > r > 0$.

(a) Mostre que a garrafa de Klein é uma variedade compacta não orientável.

(b) Mostre que a garrafa de Klein é um conjunto de nível da função C^∞ $\mathbf{F} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\mathbf{F}(x,y,z,w) = ((x^2+y^2+z^2+w^2-R^2-r^2)^2 + 4R^2(z^2+w^2), y(z^2-w^2) - 2xzw).$$