Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha Extra 1 - Partições da Unidade

Não precisam de entregar esta ficha

Esta ficha destina-se a demonstrar o

Teorema da partição da unidade: Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{O}$ uma cobertura aberta de A. Então existe uma família Φ de funções $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ e suporte compacto com as seguintes propriedades:

(i) Para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tem-se $0 \leq \varphi(\mathbf{x}) \leq 1$;

(ii) Para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ existe um aberto $U_\mathbf{x} \ni \mathbf{x}$ tal que apenas finitas funções $\varphi \in \Phi$ não se anulam em $U_\mathbf{x}$;

(iii) Para cada $\mathbf{x} \in A$ temos

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(\mathbf{x}) = 1$$

(por (ii) esta soma faz sentido);

(iv) Para cada $\varphi \in \Phi$ existe um aberto $U \in \mathcal{O}$ tal que o suporte de φ está contido em U.

(Φ diz-se uma *partição da unidade para A subordinada a $\mathcal{O}$*).

1. Preliminares:

   (a) Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ não vazio. Mostre que a *função distância a A*, $d_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

   $$d_A(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{y} \in A} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

   é uma função contínua que se anula exactamente em $\overline{A}$.

   (b) Seja U aberto e $C \subset U$ compacto. Mostre que existe $\varepsilon > 0$ tal que $V_\varepsilon(C) \subset U$, onde

   $$V_\varepsilon(C) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : d_C(\mathbf{x}) < \varepsilon\}.$$

   Conclua que existe sempre um compacto D tal que $C \subset \operatorname{int} D \subset D \subset U$.

   (c) Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

   $$\begin{cases} e^{-(x-1)^{-2}} e^{-(x+1)^{-2}} & \text{se } x \in \,]-1,1[\\ 0 \text{ se } x \notin \,]-1,1[\end{cases}$$

   é uma função C^∞ que é positiva em $]-1,1[$ e que se anula em todos os outros pontos.

(d) Para cada $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$ construa uma função $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ que seja positiva no intervalo

$$]a^1 - \varepsilon, a^1 + \varepsilon[\times \ldots \times]a^n - \varepsilon, a^n + \varepsilon[$$

e nula fora deste intervalo.

(e) Mostre que dados $\varepsilon > 0$ e $C \subset \mathbb{R}^n$ compacto existe uma função $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, positiva em todos os pontos de C e cujo suporte está contido em $V_\varepsilon(C)$.

(f) Dado $\varepsilon > 0$ construa a partir de f uma função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ com $h(x) > 0$ para $x \in]0, \varepsilon[$ e $h(x) = 0$ nos restantes pontos. Use o integral indefinido de h para construir uma função $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $0 \leq i(x) \leq 1$ para todo o $x \in \mathbb{R}$, $i(x) = 0$ para todo o $x \leq 0$ e $i(x) = 1$ para todo o $x \geq \varepsilon$.

(g) Use a última alínea para mostrar que pode escolher φ em (e) satisfazendo $0 \leq \varphi(\mathbf{x}) \leq 1$ para todo o $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\varphi(\mathbf{x}) = 1$ para todo o $\mathbf{x} \in C$.

2. Demonstração do teorema:

(a) Suponha que A é compacto. Então $\mathcal{O}$ admite uma subcobertura finita $\{U_k\}_{k=1}^N$. Mostre que cada aberto U_k contém um compacto C_k tal que $\{\operatorname{int} C_k\}_{k=1}^N$ é ainda uma cobertura aberta de A.

(b) Mostre que é possível escolher funções $\psi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, constantes iguais a 1 em C_k e cujo suporte é compacto e está contido em U_k.

(c) Seja

$$\Psi = \sum_{k=1}^{N} \psi_k$$

e $U = \Psi^{-1}(]0, +\infty[)$. Mostre que U é um aberto contendo A, e que portanto é possível escolher uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ e suporte contido em U, tal que $0 \leq f \leq 1$ e cuja restrição a A é constante igual a 1. Conclua que as funções $\varphi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dadas em U por

$$\varphi_k = \frac{f\psi_k}{\Psi}$$

e estendidas por 0 a $\mathbb{R}^n$ formam uma partição da unidade para A subordinada a $\mathcal{O}$.

(d) Seja agora A arbitrário. Mostre que uma partição da unidade para o aberto

$$V = \bigcup_{U \in \mathcal{O}} U$$

é também uma partição da unidade para A. Conclua que podemos assumir sem perda de generalidade que A é aberto.

(e) Mostre que qualquer aberto A é a união numerável dos compactos

$$A_k = \left\{ \mathbf{x} \in A : d_{\partial A}(\mathbf{x}) \geq \frac{1}{k} \text{ e } \|\mathbf{x}\| \leq k \right\}.$$

para os quais $A_k \subset \operatorname{int} A_{k+1}$ (se $\partial A = \varnothing$, i.e., se $A = \varnothing$ ou $A = \mathbb{R}^n$, definimos $d_A \equiv +\infty$).

(f) Para cada $k \in \mathbb{N}$ considere-se a cobertura aberta

$$\mathcal{O}_k = \{V \cap (\operatorname{int} A_{k+1} \setminus A_{k-2}) : V \in \mathcal{O}\}$$

do compacto $C_k = A_k \setminus \operatorname{int} A_{k-1}$ (define-se $A_{-1} = A_0 = \varnothing$). Conclua que existe uma partição da unidade Φ_k para C_k subordinada a $\mathcal{O}_k$. Mostre que a soma

$$\sigma(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{\varphi_k \in \Phi_k} \varphi_k(\mathbf{x})$$

é uma soma finita nalgum aberto contendo $\mathbf{x}$, e que portanto

$$\Phi = \left\{ \frac{\varphi_k}{\sigma} : \varphi_k \in \Phi_k \right\}$$

é uma partição da unidade para A subordinada a $\mathcal{O}$.