Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha Extra 3 - Curvas no Espaço

Não precisam de entregar esta ficha

1. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $\mathbf{g} : I \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização C^3 para a curva (variedade-1) $C \subset \mathbb{R}^3$, $t_0 \in I$ e $s : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\dot{\mathbf{g}}(u)\| du$$

a função comprimento de arco. Mostre que $s(t)$ é invertível e que

$$\mathbf{t}(s) = \frac{d}{ds}\left[\mathbf{g}(t(s))\right]$$

é um vector tangente unitário a C.

2. Mostre que

$$\mathbf{t}(s) \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds}(s) = 0.$$

Define-se a *curvatura* de C no ponto $\mathbf{g}(t(s))$ como sendo

$$\kappa(s) = \left\| \frac{d\mathbf{t}}{ds}(s) \right\|,$$

e o *vector normal principal* como

$$\mathbf{n}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \frac{d\mathbf{t}}{ds}(s)$$

em todos os pontos de C onde a curvatura não se anula.

3. Definimos o *vector binormal* através da fórmula

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s).$$

Mostre que

$$\mathbf{b}(s) \cdot \frac{d\mathbf{b}}{ds}(s) = \mathbf{t}(s) \cdot \frac{d\mathbf{b}}{ds}(s) = 0.$$

Portanto existe uma função $\tau(s)$, dita a *torsão* de C no ponto $\mathbf{g}(t(s))$, tal que

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds}(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s).$$

4. Mostre que

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}(s) \cdot \frac{d\mathbf{n}}{ds}(s) &= 0; \\
\mathbf{t}(s) \cdot \frac{d\mathbf{n}}{ds}(s) &= -\kappa(s); \\
\mathbf{b}(s) \cdot \frac{d\mathbf{n}}{ds}(s) &= -\tau(s);
\end{aligned}$$

i.e., que

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds}(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}.$$

5. Mostre que uma curva de curvatura zero é um segmento de recta.

6. Mostre que uma curva de torsão zero e curvatura constante não nula é um arco de circunferência.

7. Calcule a curvatura e a torsão da hélice descrita pela parametrização $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{g}(t) = (r\cos t, r\operatorname{sen} t, ht)$$

com $r, h > 0$. Mostre que uma curva de torsão e curvatura constantes não nulas é um arco de hélice (*teorema de Lancret*).

8. O *raio de curvatura* de C é definido por

$$r(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$$

em todos os pontos de C nos quais a curvatura não se anula. Mostre que

$$\ddot{\mathbf{g}}(t) = \dot{v}(t)\mathbf{t}(s(t)) + \frac{v^2(t)}{r(s(t))}\mathbf{n}(s(t)),$$

onde $v(t) = \|\dot{\mathbf{g}}(t)\|$. (Note que a fórmula acima dá a habitual decomposição da aceleração nas suas componentes tangencial e centrípeta).

9. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Recorde que $\mathbf{f}, \mathbf{g} : I \to \mathbb{R}^3$ têm *contacto de ordem* k em $s_0 \in I$ se são k vezes diferenciáveis em s_0 e $\mathbf{f}^{(i)}(s_0) = \mathbf{g}^{(i)}(s_0)$ para $i = 0, 1, \ldots, k$. Mostre que duas curvas C_1, C_2 possuem a mesma curvatura em $\mathbf{x}_0 \in C_1 \cap C_2$ *sse* têm contacto de segunda ordem quando parametrizadas pelo comprimento de arco. Conclua que o raio de curvatura de uma curva é o raio da única circunferência que tem contacto de segunda ordem com a curva nesse ponto.

10. Mostre que duas curvas C_1, C_2 possuem as mesmas curvatura e torsão em $\mathbf{x}_0 \in C_1 \cap C_2$ *sse* têm contacto de terceira ordem quando parametrizadas pelo comprimento de arco. Dê uma interpretação geométrica da torsão.