

Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha Extra 4 - Geodésicas e Curvatura de Superfícies

Não precisam de entregar esta ficha

1. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície (variedade-2) orientável e $\gamma : [t_0, t_1] \times \mathbb{R} \rightarrow S$ (de classe C^2) uma família a um parâmetro de caminhos em S unindo os pontos $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in S$, i.e., tal que

$$\begin{aligned}\gamma(t_0, \alpha) &= \mathbf{x}_0 \\ \gamma(t_1, \alpha) &= \mathbf{x}_1\end{aligned}$$

para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$. O comprimento do caminho α é

$$L(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\gamma}(t, \alpha)\| dt,$$

onde $\dot{\gamma} = \frac{\partial \gamma}{\partial t}$. Suponha que existe um caminho de comprimento mínimo, correspondendo a $\alpha = 0$. Mostre que

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\dot{\gamma}(t, 0)}{\|\dot{\gamma}(t, 0)\|} \right) \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}(t, 0) dt = 0$$

(**Sugestão:** Derive $L(\alpha)$ e integre por partes).

2. Mostre que o caminho de comprimento mínimo $\gamma(t) = \gamma(t, 0)$ tem que satisfazer

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \right) \in T_{\gamma(t)}^\perp S$$

para todo o $t \in]t_0, t_1[$. Um caminho satisfazendo esta equação diz-se uma *geodésica* de S .

3. Seja S a superfície de revolução descrita em coordenadas cilíndricas por $r = f(z)$, onde $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função de classe C^2 no intervalo aberto I . Mostre que as circunferências correspondentes aos pontos de extremo local de f são geodésicas. Mostre ainda que as secções da superfície por semiplanos de θ constante são também geodésicas. Particularize no caso em que S é uma superfície esférica e a superfície de um toro.
4. Seja $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização de S . A *aplicação de Gauss* é a aplicação $\mathbf{n} : S \rightarrow S^2$ (S^2 designa a superfície esférica de raio 1 em \mathbb{R}^3) dada por

$$\mathbf{n}(t^1, t^2) = \frac{\partial_1 \mathbf{g} \times \partial_2 \mathbf{g}}{\|\partial_1 \mathbf{g} \times \partial_2 \mathbf{g}\|}.$$

Mostre que

$$\mathbf{n} \cdot \partial_1 \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \partial_2 \mathbf{n} = 0,$$

e que portanto

$$\partial_1 \mathbf{n} \times \partial_2 \mathbf{n} = \kappa(t^1, t^2) \partial_1 \mathbf{g} \times \partial_2 \mathbf{g}.$$

A função $\kappa(t^1, t^2)$ diz-se a *curvatura* de S no ponto $\mathbf{g}(t^1, t^2)$.

5. Mostre que

$$|\kappa(t^1, t^2)| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V_2(\mathbf{n} \circ \mathbf{g}(B_\varepsilon(t^1, t^2)))}{V_2(\mathbf{g}(B_\varepsilon(t^1, t^2)))}.$$

6. Mostre que

$$\partial_i \mathbf{n} = \sum_{j=1}^2 a_{ij} \partial_j \mathbf{g}$$

e que

$$\partial_i \mathbf{n} \cdot \partial_j \mathbf{g} = -\mathbf{n} \cdot \partial_i \partial_j \mathbf{g}.$$

Conclua que

$$(a_{ij}) \cdot (g_{jk}) = -(b_{ik}),$$

onde

$$g_{ij} = \partial_i \mathbf{g} \cdot \partial_j \mathbf{g}$$

e

$$b_{ij} = \mathbf{n} \cdot \partial_i \partial_j \mathbf{g}.$$

7. Mostre que

$$\partial_1 \mathbf{n} \times \partial_2 \mathbf{n} = \det(a_{ij}) \partial_1 \mathbf{g} \times \partial_2 \mathbf{g}.$$

Conclua que

$$\kappa(t^1, t^2) = \frac{\det(b_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

8. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade- m . Uma função $\mathbf{f} : M \rightarrow \mathbb{R}^p$ diz-se *diferenciável* se para qualquer parametrização $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M \cap U$ a função $\mathbf{f} \circ \mathbf{g} : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ é diferenciável. Se

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^m v^i \partial_i \mathbf{g} \in T_{\mathbf{g}(\mathbf{t})},$$

define-se

$$\partial_{\mathbf{v}} \mathbf{f} = \sum_{i=1}^m v^i \partial_i (\mathbf{f} \circ \mathbf{g}).$$

Mostre que esta definição não depende da escolha da parametrização.

9. Defina-se a *primeira forma fundamental* $g : T_{\mathbf{x}}M \times T_{\mathbf{x}}M \rightarrow \mathbb{R}$ através de

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w},$$

e a *segunda forma fundamental* $b : T_{\mathbf{x}}M \times T_{\mathbf{x}}M \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\mathbf{w} \cdot \partial_{\mathbf{v}} \mathbf{n}.$$

Mostre que escrevendo

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^2 v^i \partial_i \mathbf{g};$$

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^2 w^i \partial_i \mathbf{g},$$

se tem

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} v^i w^j;$$

$$b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^2 b_{ij} v^i w^j.$$

Conclua que g e b são de facto formas quadráticas (i.e., tensores simétricos). Estes tensores são também conhecidos como o *tensor da métrica* e o *tensor de curvatura extrínseca*.

10. Mostre que a condição para uma curva ser uma geodésica pode ser escrita como

$$\partial_t \mathbf{t} = \lambda \mathbf{n},$$

em cada ponto da curva, onde \mathbf{t} é o vector tangente unitário à curva. Note que $|\lambda|$ é a curvatura da geodésica.

11. Mostre que

$$|b(\mathbf{t}, \mathbf{t})|$$

é a curvatura da geodésica de vector tangente \mathbf{t} . Mostre que os vectores próprios de (b_{ij}) correspondem às geodésicas de curvatura máxima e mínima (ditas as *curvaturas principais de S*), e que estas são exactamente os módulos dos valores próprios correspondentes. Conclua que o módulo da curvatura é o produto das curvaturas principais. (Isto mostra que o módulo da curvatura não depende da escolha da parametrização).

12. Mostre que se S tem curvatura positiva em \mathbf{x}_0 então existe uma vizinhança de \mathbf{x}_0 na qual todos os pontos de M estão do mesmo lado do plano tangente, e que se S tem curvatura negativa em \mathbf{x}_0 então em qualquer vizinhança de \mathbf{x}_0 existem pontos de M dos dois lados do plano tangente. (Isto mostra que o sinal da curvatura não depende da escolha da parametrização).
13. Calcule a curvatura de uma superfície cilíndrica, de uma superfície cónica, de uma superfície esférica de raio $r > 0$ e da superfície de um toro de raios $R > r > 0$ (esta última apenas nos pontos de intersecção das geodésicas que determinou em 3).
14. As componentes do tensor de curvatura de Riemann são dadas pela fórmula

$$R_{ijkl} = \left[\partial_i (\partial_j \partial_k \mathbf{g})^\top - \partial_j (\partial_i \partial_k \mathbf{g})^\top \right] \cdot \partial_l \mathbf{g},$$

onde $^\top$ designa a projecção no espaço tangente a S . Mostre que

$$R_{ijkl} = b_{il} b_{jk} - b_{ik} b_{jl}.$$