Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha Extra 7 - Relatividade e Electromagnetismo

Não precisam de entregar esta ficha

Um *referencial inercial* permite atribuir coordenadas $\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = (t, x, y, z)$ a cada acontecimento de forma a que a história de uma partícula livre é representada por uma linha recta da forma $(x, y, z) = t\left(v^1, v^2, v^3\right)$, com $\left(v^1, v^2, v^3\right) \in \mathbb{R}^3$. Portanto vemos que dois quaisquer referenciais inerciais devem estar relacionados por uma transformação de coordenadas linear. É um facto experimental que a velocidade de um sinal luminoso medida em qualquer referencial inercial possui o mesmo valor; escolheremos unidades em que este valor é 1 (por exemplo, medindo o tempo em anos e as distâncias em anos-luz).

1. Mostre que se $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ é uma mudança de coordenadas entre dois observadores inerciais[1], devemos ter
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle L\mathbf{x}, L\mathbf{x} \rangle = 0,$$
onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ designa o *pseudo-produto interno de Minkowski*, definido por
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -x^0 y^0 + x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3$$
para dois quaisquer vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^4$.

2. Mostre que o produto interno de Minkowski é bilinear, simétrico e *não-degenerado*, i.e., se
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$$
para todo o $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^4$ então $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

3. Mostre que a base canónica $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ é *ortonormal*, i.e., que
$$\langle \mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu \rangle = \eta_{\mu\nu},$$
onde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ e $\eta = \operatorname{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Utilizando vectores da forma $\mathbf{e}_0 \pm \mathbf{e}_i$ (com $i = 1, 2, 3$), e outros, mostre que se $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ é uma mudança de coordenadas entre dois observadores inerciais então
$$\langle L\mathbf{e}_\mu, L\mathbf{e}_\nu \rangle = k\eta_{\mu\nu},$$
para algum $k \in \mathbb{R}$.

4. Mostre que se Λ é a representação matricial da transformação $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ da questão anterior, então
$$\Lambda^t \eta \Lambda = k\eta.$$
Conclua que $k > 0$. Se $k = 1$ diremos que L é uma *transformação de Lorentz* (os outros casos correspondem apenas a mudanças do sistema de unidades). Note que as transformações de Lorentz são precisamente as transformações lineares que preservam o pseudo-produto interno de Minkowski.

[1] Portanto os dois observadores atribuem coordenadas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}' = L\mathbf{x}$ ao mesmo acontecimento.

5. Recorde $(G, \cdot)$ é um grupo se a operação binária $\cdot : G \times G \to G$ satisfaz:

   (i) *Associatividade:* $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$ para todo o $g_1, g_2, g_3 \in G$;

   (ii) *Existência de neutro:* Existe $e \in G$ tal que $e \cdot g = g \cdot e = g$ para todo o $g \in G$;

   (iii) *Existência de inverso:* Para todo o $g \in G$ existe $g^{-1} \in G$ tal que $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$.

   Mostre que as transformações de Lorentz com a operação de composição formam um grupo.

6. Mostre que

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \cosh u & -\operatorname{senh} u & 0 & 0 \\ -\operatorname{senh} u & \cosh u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   representa uma transformação de Lorentz. Mostre que as equações $x' = y' = z' = 0$ nas novas coordenadas são dadas por $x - vt = y = z = 0$ nas coordenadas originais, onde $v = \tanh u$. Conclua que esta transformação corresponde a mudar para as coordenadas de um observador que se move com velocidade v ao longo do eixo dos xx em relação ao observador original. Mostre ainda que

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

   representa uma transformação de Lorentz. Qual a relação entre os dois observadores neste caso?

7. O *elemento de volume* é definido por

$$dV_4 = dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz.$$

   Mostre que se $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ é uma base ortonormada então

$$dV_4 (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \pm 1.$$

   Portanto fixa uma orientação em $\mathbb{R}^4$ o elemento de volume não depende do referencial inercial positivamente orientado escolhido para o definir.

8. Dado um vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$, define-se o covector-1 mediante

$$\omega_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle.$$

   Mostre que esta correspondência fornece uma bijecção linear entre $\mathbb{R}^4$ e $\left(\mathbb{R}^4\right)^*$, e que

$$\omega_{\mathbf{e}_0} = -dt, \quad \omega_{\mathbf{e}_1} = dx, \quad \omega_{\mathbf{e}_2} = dy, \quad \omega_{\mathbf{e}_3} = dz.$$

9. Dado um covector $\omega \in \Lambda^1\left(\mathbb{R}^4\right)$, define-se o seu *dual* ${}^*\omega \in \Lambda^3\left(\mathbb{R}^4\right)$ mediante

$$ {}^*\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = dV_4(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3), $$

onde $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ é o único vector que satisfaz $\omega = \omega_{\mathbf{v}}$. Mostre que

$$ \begin{aligned} {}^*dt &= -dx \wedge dy \wedge dz; \\ {}^*dx &= -dt \wedge dy \wedge dz; \\ {}^*dy &= -dt \wedge dz \wedge dx; \\ {}^*dz &= -dt \wedge dx \wedge dy. \end{aligned} $$

10. Dados $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^4$, podemos construir o tensor-2 $\omega_{\mathbf{v}_1} \otimes \omega_{\mathbf{v}_2} \in T^2(\mathbb{R}^4)$. Define-se o *dual* deste tensor, ${}^*\omega_{\mathbf{v}_1} \otimes \omega_{\mathbf{v}_2} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4)$, mediante

$$ {}^*\omega_{\mathbf{v}_1} \otimes \omega_{\mathbf{v}_2}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) = \frac{1}{2} dV_4(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4). $$

Esta definição estende-se a todos os elementos de $T^2(\mathbb{R}^4)$ por linearidade. Usando

$$ \omega_{\mathbf{v}_1} \wedge \omega_{\mathbf{v}_2} = \omega_{\mathbf{v}_1} \otimes \omega_{\mathbf{v}_2} - \omega_{\mathbf{v}_2} \otimes \omega_{\mathbf{v}_1}, $$

mostre que

$$ {}^*\omega_{\mathbf{v}_1} \wedge \omega_{\mathbf{v}_2}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) = dV_4(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4), $$

e use este resultado para mostrar que

$$ \begin{aligned} {}^*dt \wedge dx &= -dy \wedge dz; \\ {}^*dt \wedge dy &= -dz \wedge dx; \\ {}^*dt \wedge dz &= -dx \wedge dy; \\ {}^*dx \wedge dy &= dt \wedge dz; \\ {}^*dy \wedge dz &= dt \wedge dx; \\ {}^*dz \wedge dx &= dt \wedge dy. \end{aligned} $$

11. Podemos identificar as hipersuperfícies de t constante com $\mathbb{R}^3$ equipado com o produto interno Euclidiano. Portanto podemos identificar campos vectoriais em $\mathbb{R}^4$ com componente segundo $\mathbf{e}_0$ nula com campos vectoriais dependentes do tempo em $\mathbb{R}^3$, que representaremos usando a notação $\vec{v}$ (em vez de $\mathbf{v}$). Dado um campo eléctrico $\vec{E} = E^1\mathbf{e}_1 + E^2\mathbf{e}_2 + E^3\mathbf{e}_3$ e um campo magnético $\vec{B} = B^1\mathbf{e}_1 + B^2\mathbf{e}_2 + B^3\mathbf{e}_3$ dependentes do tempo, definimos a forma-2 em $\mathbb{R}^4$

$$ F = E^1 dx \wedge dt + E^2 dy \wedge dt + E^3 dz \wedge dt + B^1 dy \wedge dz + B^2 dz \wedge dx + B^3 dx \wedge dy $$

(dita o *tensor de Faraday*). Mostre que F é fechada *sse* $\vec{E}$ e $\vec{B}$ satisfazem as *equações de Maxwell homogéneas* $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

12. Dada uma densidade de carga eléctrica ρ e uma densidade de corrente eléctrica $\vec{j}$ (ambas dependentes do tempo), define-se o *vector densidade-corrente*

$$ \mathbf{j} = \rho\, \mathbf{e}_0 + \vec{j} $$

e a correspondente forma-1

$$j = \omega_{\mathbf{j}} = -\rho dt + j^1 dx + j^2 dy + j^3 dz.$$

Mostre que as *equações de Maxwell não homogéneas*[2] $\nabla \cdot \vec{E} = \rho$, $\nabla \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ são equivalentes a

$$d^*F =^* j.$$

13. A forma $^*j$ é exacta, e portanto $d^*j = 0$. Mostre que esta equação é equivalente à *equação da continuidade*

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

14. As equações de Maxwell podem então ser escritas na forma geométrica

$$\begin{aligned} dF &= 0 \\ d^*F &=^* j \end{aligned}$$

(portanto independente do referencial inercial escolhido para as escrever). No entanto as formas F, j escrevem-se de forma diferente em diferentes referenciais inerciais. Encontre a relação entre as expressões destas formas em dois referenciais relacionados por cada uma das transformações de Lorentz da questão 6, e determine qual a lei de transformação de $\vec{E}, \vec{B}, \rho$ e $\vec{j}$ sob estas mudanças de referencial.

15. A história de uma partícula com massa é representada por uma curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$. Mostre que

$$\|\vec{v}\| < 1 \Leftrightarrow \left\langle \frac{d\mathbf{x}}{ds}, \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right\rangle < 0,$$

onde

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

é a velocidade da partícula. Na verdade todas as partícula com massa se movem a velocidades inferiores à da luz, e portanto a condição acima é sempre satisfeita.

16. O *tempo próprio* da partícula é definido como o parâmetro τ tal que $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau}$ é o vector tangente unitário à curva que representa a história da partícula, i.e., tal que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = -1$. Indique como pode obter este parâmetro.

17. A *equação do movimento* de uma partícula carregada com massa de repouso m e carga e é

$$m\omega_{\frac{d\mathbf{u}}{d\tau}} = -e\mathbf{u} \lrcorner F,$$

onde $\mathbf{u} \lrcorner F$ é a forma-1 definida por

$$\mathbf{u} \lrcorner F(\mathbf{v}) = F(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Mostre que esta equação é equivalente à *Lei de Lorentz*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}}\right) = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

[2] Escolhemos unidades nas quais $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$.