AMIII - Exercícios Resolvidos Sobre Formas Diferenciais e o Teorema de Stokes

30 de Dezembro de 2002

1. Seja S a superfície

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \cosh x, |x| < 1, y \in]0, 1[\right\}.$$

Calcule:

(a) A área de S;

(b) O centróide de S;

(c) O momento de inércia de S em torno do eixo dos yy (assumindo uma densidade de massa por unidade de área constante igual a 1).

Resolução:

(a) Uma parametrização desta superfície é por exemplo $\mathbf{g} :]-1, 1[\times]0, 1[\to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{g}(u, v) = (u, v, \cosh u).$$

O *pull-back* por esta parametrização de um elemento de volume compatível com a orientação por ela induzida é

$$\mathbf{g}^* dV_2 = \sqrt{\det g(u, v)} du \wedge dv,$$

onde g é a matriz 2×2 dada por

$$g_{11} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u} = (1, 0, \operatorname{senh} u) \cdot (1, 0, \operatorname{senh} u) = 1 + \operatorname{senh}^2 u = \cosh^2 u;$$
$$g_{12} = G_{21} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial v} = (1, 0, \operatorname{senh} u) \cdot (0, 1, 0) = 0;$$
$$g_{22} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial v} = (0, 1, 0) \cdot (0, 1, 0) = 1.$$

Portanto

$$\det g(u, v) = \begin{vmatrix} \cosh^2 u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \cosh^2 u$$

e a área da superfície é

$$V_2(S) = \int_S dV_2 = \int_{]-1,1[\times]0,1[} \sqrt{\cosh^2 u}\, du \wedge dv = \int_{-1}^{1} \int_0^1 \cosh u \, dv du$$
$$= [\operatorname{senh} u]_{-1}^{1} = 2 \operatorname{senh} 1 = e - \frac{1}{e}.$$

(b) Por simetria $x_C = 0$ e $y_C = \frac{1}{2}$. Como

$$\int_S z dV_2 = \int_{]-1,1[\times]0,1[} \cosh u \cosh u \, du \wedge dv = \int_{-1}^{1} \int_0^1 \cosh^2 u \, dv du$$
$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2} \right)^2 du = \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} \left(e^{2u} + e^{-2u} + 2 \right) du$$
$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(\cosh(2u) + 1 \right) du = \frac{1}{4} \left[\operatorname{senh}(2u) \right]_{-1}^{1} + 1 = \frac{1}{2} \operatorname{senh} 2 + 1$$

temos

$$z_C = \frac{1}{V_2(S)} \int_S z dV_2 = \frac{\frac{1}{2} \operatorname{senh} 2 + 1}{2 \operatorname{senh} 1}.$$

(c) Por definição,

$$I_y = \int_S 1 \left(x^2 + z^2 \right) dV_2 = \int_{]-1,1[\times]0,1[} \left(u^2 + \cosh^2 u \right) \cosh u \, du \wedge dv$$
$$= \int_{-1}^{1} \int_0^1 \left(u^2 + \operatorname{senh}^2 u + 1 \right) \cosh u \, dv du$$
$$= \int_{-1}^{1} u^2 \cosh u \, du + \left[\frac{\operatorname{senh}^3 u}{3} \right]_{-1}^{1} + 2 \operatorname{senh} 1$$
$$= 8 \operatorname{senh} 1 - 4 \cosh 1 + \frac{2}{3} \operatorname{senh}^3 1.$$

2. Calcule

$$\oint_{Q^+} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} + e^{x^2} \right) dx + \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + \operatorname{sen} y^2 \right) dy,$$

onde Q é o quadrado com vértices $(2,0), (0,2), (-2,0), (0,-2)$ e $+$ indica que Q deve ser percorrido no sentido directo.

Resolução: Claramente a forma

$$\eta = e^{x^2} dx + \operatorname{sen} y^2 dy$$

é fechada, e portanto exacta (uma vez que está definida em $\mathbb{R}^2$, que é em estrela). Portanto o seu integral ao longo de Q será nulo. É fácil ver que a forma

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

é também fechada:

$$d\omega = -\frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{\left(x^2 + y^2 \right)^2} dy \wedge dx + \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{\left(x^2 + y^2 \right)^2} dx \wedge dy = 0.$$

No entanto, uma vez que o domínio de ω ($\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$) não é em estrela, não podemos concluir que é exacta. De facto, não é exacta: se C representa a circunferência de raio 1 em torno da origem, parametrizada por exemplo por $\mathbf{g} :]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\mathbf{g}(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta),$$

tem-se

$$\oint_{C^+} \omega = \int_{]0,2\pi[^+} \mathbf{g}^*\omega = \int_{]0,2\pi[^+} -\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta} d(\cos\theta) + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta} d(\operatorname{sen}\theta)$$
$$= \int_{]0,2\pi[^+} \operatorname{sen}^2\theta d\theta + \cos^2\theta d\theta = \int_{]0,2\pi[^+} d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \neq 0.$$

Se A é a região do plano compreendida entre C e Q, tem-se $\partial A = C \cup Q$. A orientação usual de A (dada pelo elemento de volume $dV_2 = dx \wedge dy$) induz em Q a orientação que corresponde a percorrer Q no sentido directo e C no sentido inverso; portanto pelo Teorema de Stokes

$$\oint_{Q^+} \omega = \int_A d\omega + \oint_{C^+} \omega = \int_A 0 + 2\pi = 2\pi$$

e o integral pedido é

$$\oint_{Q^+} \omega + \oint_{Q^+} \eta = 2\pi + 0 = 2\pi.$$

3. Calcule o fluxo do campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (xz, yz, -z^2)$ para fora da superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = 1 + x^2 + y^2,\ 2 \leq z \leq 3\}$$

(i.e., no sentido em que a distância ao eixo dos zz aumenta)

(a) Pela definição.
(b) Usando o Teorema da Divergência.
(c) Usando o Teorema de Stokes para campos vectoriais.

Resolução:

(a) Uma parametrização de S é por exemplo $\mathbf{g} :]0,2\pi[\times]2,3[\to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{g}(\theta, z) = \left(\sqrt{z^2-1}\cos\theta, \sqrt{z^2-1}\operatorname{sen}\theta, z\right),$$

uma vez que em coordenadas cilíndricas a equação que define S se escreve $z^2 = 1 + r^2$. Como

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -\sqrt{z^2-1}\operatorname{sen}\theta & \sqrt{z^2-1}\cos\theta & 0 \\ z(z^2-1)^{-\frac{1}{2}}\cos\theta & z(z^2-1)^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sen}\theta & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \left(\sqrt{z^2-1}\cos\theta, \sqrt{z^2-1}\operatorname{sen}\theta, -z\right)$$

aponta para fora de S, concluímos que $\mathbf{g}$ induz a orientação correspondente à normal exterior unitária, e que portanto o fluxo de $\mathbf{F}$ para fora de S pode ser calculado a partir de

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dV_2 =$$
$$= \int_2^3 \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{z^2-1}\cos\theta, \sqrt{z^2-1}\operatorname{sen}\theta, -z\right) \cdot \left(z\sqrt{z^2-1}\cos\theta, z\sqrt{z^2-1}\operatorname{sen}\theta, -z^2\right) d\theta dz$$
$$= \int_2^3 \int_0^{2\pi} (z^3 - z + z^3) d\theta dz = 60\pi.$$

Alternativamente, podemos considerar a forma-2

$$\Omega_{\mathbf{F}} = xzdy \wedge dz + yzdz \wedge dx - z^2 dx \wedge dy$$

e integrá-la ao longo de S. Uma vez que

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}^*\Omega_{\mathbf{F}} &= z\sqrt{z^2-1}\cos\theta d\left(\sqrt{z^2-1}\operatorname{sen}\theta\right) \wedge dz \\
&+ z\sqrt{z^2-1}\operatorname{sen}\theta dz \wedge d\left(\sqrt{z^2-1}\cos\theta\right) \\
&- z^2 d\left(\sqrt{z^2-1}\cos\theta\right) \wedge d\left(\sqrt{z^2-1}\operatorname{sen}\theta\right) \\
&= z\left(z^2-1\right)\cos^2\theta d\theta \wedge dz - z\left(z^2-1\right)\operatorname{sen}^2\theta dz \wedge d\theta - z^2 z dz \wedge d\theta \\
&= \left(z^3 - z + z^3\right) d\theta \wedge dz,
\end{aligned}$$

temos que

$$\int_S \Omega_{\mathbf{F}} = \int_2^3 \int_0^{2\pi} \left(2z^3 - z\right) d\theta dz = 60\pi,$$

em conformidade com o resultado anterior. Vimos através do cálculo do produto externo das colunas da matriz Jacobiana da parametrização que esta induz a orientação correspondente à normal unitária exterior; caso não tivéssemos feito este cálculo, poderíamos determinar qual a orientação induzida pela parametrização notando que uma base para o espaço normal a S no ponto (x, y, z) é dada por

$$\nabla\left(x^2 + y^2 - z^2 + 1\right) = (2x, 2y, -2z).$$

Apesar de a nossa superfície ser apenas o pedaço de hiperbolóide entre $z = 2$ e $z = 3$, para efeitos de cálculo da orientação é mais simples considerar toda a folha em $z > 0$; nesse caso, no ponto $(0, 0, 1) = \mathbf{g}(0, 1)$ a normal exterior unitária é $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$, e $\Omega_{\mathbf{n}} = -dx \wedge dy$. Uma vez que

$$\mathbf{g}^*\Omega_{\mathbf{n}} = -d\left(\sqrt{z^2-1}\cos\theta\right) \wedge d\left(\sqrt{z^2-1}\operatorname{sen}\theta\right) = -zdz \wedge d\theta = 1d\theta \wedge dz$$

para $(\theta, z) = (0, 1)$, e $1 > 0$, concluiríamos que $\mathbf{g}$ induz a orientação correspondente a $\mathbf{n}$.

(b) É fácil ver que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. A superfície S é um pedaço de um hiperbolóide cujo eixo é o eixo dos zz, e o seu bordo é constituído por uma circunferência C_1 de raio $\sqrt{3}$ contida no plano $z = 2$ e uma circunferência C_2 de raio $\sqrt{8}$ contida no plano $z = 3$. Para aplicar o Teorema da Divergência (que só pode ser aplicado a superfícies que limitam volumes), adicionamos a S os dois círculos D_1 e D_2 contidos nos planos $z = 2$ e $z = 3$ e cujos bordos são C_1 e C_2. A normal unitária indicada corresponde então à normal unitária exterior $\mathbf{n}$ ao volume V limitado por $D_1 \cup S \cup D_2$. Note-se que, em D_1, $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ e, em D_2, $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. Por outro lado, $\mathbf{F}(x, y, 2) = (2x, 2y, -4)$ e $\mathbf{F}(x, y, 3) = (3x, 3y, -9)$. Pelo Teorema da Divergência tem-se então

$$\int_{D_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 + \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 + \int_{D_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV_3 = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dV_2 &= -\int_{D_1} 4dV_2 - \int_{D_2}(-9)dV_2\\ &= 9V_2(D_2) - 4V_2(D_1).\end{aligned}$$

Como D_1 e D_2 são círculos de raios $\sqrt{3}$ e $\sqrt{8}$, $V_2(D_1) = 3\pi$ e $V_2(D_2) = 8\pi$, e portanto

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dV_2 = 72\pi - 12\pi = 60\pi,$$

em conformidade com o nosso cálculo anterior.

(c) Note-se que $\nabla\cdot\mathbf{F} = 0$. Como $\mathbf{F}$ está definido em $\mathbb{R}^3$, que é um conjunto em estrela, concluímos que $\mathbf{F}$ é um campo rotacional. Se $\mathbf{A}$ é um potencial vector para $\mathbf{F}$, i.e., se $\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{A}$, então devemos ter

$$\Omega_{\mathbf{F}} = d\omega_{\mathbf{A}} \Leftrightarrow d\omega_{\mathbf{A}} = xzdy\wedge dz + yzdz\wedge dx - z^2dx\wedge dy,$$

ou seja,

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = xz\\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = yz\\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = -z^2\end{cases}$$

Como é sabido, o facto de o potencial vector estar definido a menos de um gradiente (ou equivalentemente de $\omega_{\mathbf{A}}$ estar definido menos de uma derivada exterior) permite-nos sempre assumir que uma das componentes deste se anula. Escolhemos por exemplo $A_3 = 0$. Então obtém-se

$$\begin{cases} -\frac{\partial A_2}{\partial z} = xz\\ \frac{\partial A_1}{\partial z} = yz\\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = -z^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_2 = -\frac{xz^2}{2} + f(x,y)\\ A_1 = \frac{yz^2}{2} + g(x,y)\\ -\frac{z^2}{2} + \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{z^2}{2} - \frac{\partial g}{\partial y} = -z^2\end{cases}$$

Portanto podemos por exemplo escolher $f = g = 0$, e um potencial vector para $\mathbf{F}$ é então

$$\mathbf{A} = \left(\frac{yz^2}{2}, -\frac{xz^2}{2}, 0\right).$$

Pelo Teorema de Stokes,

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dV_2 = \oint_{C_1}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{g} + \oint_{C_2}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{g}$$

onde as orientações de C_1 e C_2 devem ser compatíveis com a normal unitária $\mathbf{n}$. Mais precisamente, C_1 deve ser percorrida no sentido directo quando vista do semieixo positivo dos zz, e C_2 no sentido inverso. Uma parametrização para C_1 é $\mathbf{g}(\theta) = (\sqrt{3}\cos\theta, \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta, 2)$, e portanto

$$\begin{aligned}\oint_{C_1}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{g} &= \int_0^{2\pi}(2\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta, -2\sqrt{3}\cos\theta, 0)\cdot(-\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta, \sqrt{3}\cos\theta, 0)\,d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}(-6)d\theta = -12\pi.\end{aligned}$$

Uma parametrização para C_2 é $\mathbf{g}(\theta) = \left(\sqrt{8}\cos\theta, \sqrt{8}\operatorname{sen}\theta, 3\right)$; o sentido de C_2 correspondente a esta parametrização é no entanto o contrário àquele que pretendemos, pelo que

$$\begin{aligned}\oint_{C_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{g} &= -\int_0^{2\pi} \left(\frac{9}{2}\sqrt{8}\operatorname{sen}\theta, -\frac{9}{2}\sqrt{8}\cos\theta, 0\right)\cdot\left(-\sqrt{8}\operatorname{sen}\theta, \sqrt{8}\cos\theta, 0\right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 36 d\theta = 72\pi.\end{aligned}$$

Portanto mais uma vez concluímos que

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dV_2 = 60\pi.$$

4. Seja

$$M = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2 + z^2 = 1\right\}$$

Calcule o fluxo do campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (xe^{\sin z^2}, -ye^{\sin z^2}, z)$$

através de M no sentido da normal exterior.

Resolução: M é o bordo do toro sólido

$$T = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2 + z^2 \le 1\right\},$$

e

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = e^{\sin z^2} - e^{\sin z^2} + 1 = 1.$$

Logo

$$\int_M \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dV_2 = \int_T \nabla\cdot\mathbf{F}\, dV_3 = \int_T 1\, dV_3 = V_3(T) = 2\pi\cdot 2\cdot\pi 1^2 = 4\pi^2$$

(onde usámos o Teorema de Pappus).

5. Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_M \omega$ com a orientação correspondente à normal exterior, onde

$$M = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2 = 1, z\ge 0\right\}$$

e

$$\omega = xe^{-z}dy\wedge dz + ye^{-z}dz\wedge dx$$

Resolução: Começamos por observar que o integral pedido é apenas o fluxo do campo $\mathbf{F}_\omega = (e^{-z}x, e^{-z}y, 0)$ para fora da superfície cilíndrica infinita M, e que portanto o integral pedido será

$$\int_M \omega = \int_M (e^{-z}x, e^{-z}y, 0)\cdot(x,y,0)dV_2 = \int_M e^{-z}dV_2 = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} e^{-z}d\theta dz = 2\pi.$$

No entanto, queremos usar o Teorema de Stokes para calcular o integral. Uma forma de o fazer é notar que

$$d\omega = 2e^{-z}dx\wedge dy\wedge dz.$$

Seja $h > 0$ e

$$\begin{aligned}
D_0 &= \left\{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1, z=0\right\};\\
M_h &= \left\{(x,y,z) : x^2+y^2 = 1, 0 \leq z \leq h\right\};\\
D_h &= \left\{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1, z=h\right\};\\
A_h &= \left\{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq h\right\}.
\end{aligned}$$

Então $\partial A_h = D_0 \cup M_h \cup D_h$ e portanto pelo Teorema de Stokes

$$\int_{A_h} d\omega = \int_{D_0} \omega + \int_{M_h} \omega + \int_{D_h} \omega.$$

A orientação correspondente à normal exterior em M_h induz em A_h a orientação usual (dada pelo elemento de volume $dV_3 = dx \wedge dy \wedge dz$). Uma vez que $\mathbf{F}_\omega$ é tangente a D_0, D_h, $\int_{D_0} \omega = \int_{D_h} \omega = 0$, e portanto

$$\begin{aligned}
\int_{M_h} \omega = \int_{A_h} d\omega = \int_{A_h} 2e^{-z} dx \wedge dy \wedge dz = \int_{A_h} 2e^{-z} dxdydz = \int_0^h \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2e^{-z} r d\theta dr dz = \\
= 2\pi \left[r^2\right]_0^1 \left[-e^{-z}\right]_0^h = 2\pi \left(1 - e^{-h}\right).
\end{aligned}$$

É fácil ver que por exemplo o Teorema da Convergência Dominada

$$\int_M \omega = \lim_{h \to +\infty} \int_{M_h} \omega = \lim_{h \to +\infty} 2\pi \left(1 - e^{-h}\right) = 2\pi$$

(como teria que ser).

Outra forma de calcular o integral usando o Teorema de Stokes é a seguinte: como vimos,

$$d\omega - 2e^{-z} dx \wedge dy \wedge dz = 0 \Leftrightarrow d(\omega + 2e^{-z} dx \wedge dy) = 0$$

pelo que a forma-2

$$\eta = \omega - 2e^{-z} dx \wedge dy$$

é fechada. Uma vez que o seu domínio ($\mathbb{R}^3$) é em estrela, concluimos que é exacta. Além disso o integral de $e^{-z} dx \wedge dy$ ao longo de M corresponde ao fluxo do campo vertical $(0, 0, 2e^{-z})$ através de M; uma vez que este campo é tangente a M, o fluxo é nulo. Portanto

$$\int_M \omega = \int_M \eta.$$

Calculemos um potencial para η: se

$$\xi = \xi_1 dx + \xi_2 dy + \xi_3 dz$$

é tal que $d\xi = \eta$ então devemos ter

$$d\xi = xe^{-z} dy \wedge dz + ye^{-z} dz \wedge dx + 2e^{-z} dx \wedge dy,$$

ou seja,

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi_3}{\partial y} - \frac{\partial \xi_2}{\partial z} = xe^{-z} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial z} - \frac{\partial \xi_3}{\partial x} = ye^{-z} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x} - \frac{\partial \xi_1}{\partial y} = 2e^{-z} \end{cases}$$

Como é sabido, o facto de o potencial estar definido a menos da derivada exterior de uma função permite-nos sempre assumir que uma das componentes deste se anula. Escolhemos por exemplo $\xi_2 = 0$. Então obtém-se

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi_3}{\partial y} = xe^{-z} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial z} - \frac{\partial \xi_3}{\partial x} = ye^{-z} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial y} = -2e^{-z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = xye^{-z} + f(x,z) \\ 2ye^{-z} + \frac{\partial g}{\partial z} - ye^{-z} - \frac{\partial f}{\partial x} = ye^{-z} \\ \xi_1 = -2ye^{-z} + g(x,z) \end{cases}$$

Portanto podemos por exemplo escolher $f(x,z) = g(x,z) = 0$. Um potencial para η é então

$$\xi = -2ye^{-z}dx + xye^{-z}dz.$$

Apesar de M ser uma variedade com bordo,

$$\partial M = C_0 = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 1, z = 0\right\},$$

não podemos aplicar directamente o Teorema de Stokes, uma vez que este teorema só é válido para variedades com bordo compactas, i.e., limitadas (de certa forma, M possui parte do bordo "no infinito"). Podemos no entanto aplicá-lo a M_h, cujo bordo é $\partial M_h = C_0 \cup C_h$, com

$$C_h = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 1, z = h\right\}.$$

Pela regra da mão direita facilmente se conclui que a orientação correspondente à normal exterior em M induz a orientação que corresponde a percorrer C_0 no sentido directo no plano xOy e C_h no sentido oposto. Portanto

$$\begin{aligned} \int_{M_h} \eta &= \oint_{C_0^+} \xi + \oint_{C_h^-} \xi = \int_{]0,2\pi[^+} -2\operatorname{sen}\theta d(\cos\theta) - \int_{]0,2\pi[^+} -2\operatorname{sen}\theta e^{-h} d(\cos\theta) \\ &= \int_0^{2\pi} 2\operatorname{sen}^2\theta d\theta - e^{-h}\int_0^{2\pi} 2\operatorname{sen}^2\theta d\theta = 2\pi\left(1 - e^{-h}\right) \end{aligned}$$

e consequentemente

$$\int_M \omega = \int_M \eta = \lim_{h\to+\infty} \int_{M_h} \eta = \lim_{h\to+\infty} 2\pi\left(1 - e^{-h}\right) = 2\pi.$$

6. Seja $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y^2 + z^2,\ x \leq 1\}$. Usando o teorema de Stokes,

   (a) Calcule $\int_{M^\mu} zdx \wedge dy + xdz \wedge dy$ onde μ é a orientação determinada pela normal a M que tem primeira componente positiva.

   (b) Calcule $\int_{\partial M} ydz$ sendo ∂M percorrida no sentido que visto da origem é a dos ponteiros do relógio.

Resolução:

(a) Claramente tem-se $d(xzdy) = zdx \wedge dy + xdz \wedge dy$, logo pelo teorema de Stokes,

$$\int_{M^\mu} zdx \wedge dy + xdz \wedge dy = \int_{\partial M^\nu} xzdy,$$

onde ν é a orientação induzida em ∂M pela orientação de M. Tem-se

$$\partial M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y^2 + z^2, x = 1\} = \{(1,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 1\}.$$

Uma vez que a orientação dada a M corresponde à normal que aponta para dentro do parabolóide, pela regra da mão direita, a circunferência ∂M deve ser percorrida num sentido que, visto de um ponto no semieixo positivo dos xx longe da origem, parece o contrário ao dos ponteiros do relógio.

A parametrização $\mathbf{g} :]0, 2\pi[\to \partial M$ definida por

$$\mathbf{g}(\theta) = (1, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$$

percorre ∂M no sentido desejado, logo

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M^\nu} xzdy &= \int_0^{2\pi} \mathbf{g}^*(xzdy) \\
&= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta d(\cos\theta) \\
&= \int_0^{2\pi} -\operatorname{sen}^2\theta d\theta \\
&= -\pi.
\end{aligned}$$

(b) Pelo teorema de Stokes,

$$\int_{\partial M} ydz = \int_{M^\mu} dy \wedge dz$$

onde μ é a orientação de M que induz a orientação dada em ∂M. Pela regra da mão direita vemos que μ é a orientação correspondente à normal que tem componente segundo x positiva.

Uma parametrização para M é por exemplo $\mathbf{g} :]0,1[\times]0, 2\pi[\to M$ definida por

$$\mathbf{g}(r,\theta) = (r^2, r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta).$$

Como

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 2r & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

a primeira componente de $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta}$ é $r > 0$. Conclui-se que $\mathbf{g}$ induz a orientação μ e portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{M^\mu} dy \wedge dz &= \int_{]0,1[\times]0,2\pi[^+} \mathbf{g}^*(dy \wedge dz) \\
&= \int_{]0,1[\times]0,2\pi[^+} d(r\cos\theta) \wedge d(r\,\mathrm{sen}\,\theta) \\
&= \int_{]0,1[\times]0,2\pi[^+} (\cos\theta dr - r\,\mathrm{sen}\,\theta d\theta) \wedge (\mathrm{sen}\,\theta dr + r\cos\theta d\theta) \\
&= \int_{]0,1[\times]0,2\pi[^+} r dr \wedge d\theta \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r d\theta dr \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

7. Seja $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 0\}$. Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_{M^\mu}(1+z^2)dx \wedge dy$ onde μ é a orientação determinada pela normal exterior à esfera.

Resolução:

A forma $(1+z^2)dx\wedge dy$ não é fechada e portanto não é exacta. No entanto, para $(x,y,z) \in M$ temos

$$1 + z^2 = 1 + (1 - x^2 - y^2) = 2 - x^2 - y^2,$$

pelo que

$$\int_{M^\mu}(1+z^2)dx \wedge dy = \int_{M^\mu}(2 - x^2 - y^2)dx \wedge dy.$$

A forma $(2-x^2-y^2)dx \wedge dy$ é fechada em $\mathbb{R}^3$, que é um conjunto em estrela, e portanto é exacta.

É fácil adivinhar um potencial para esta forma: $d(\left(2x - \frac{1}{3}x^3\right)dy) = (2-x^2)dx \wedge dy$ e $d(\frac{1}{3}y^3 dx) = -y^2 dx \wedge dy$, logo

$$\frac{1}{3}y^3 dx + \left(2x - \frac{1}{3}x^3\right) dy$$

é um potencial para $(2-x^2-y^2)dx \wedge dy$.

Pela regra da mão direita, a orientação ν induzida por μ em $\partial M = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1\}$ é aquela que vista de um ponto com coordenada z positiva parece o sentido anti-horário. Uma parametrização para M é por exemplo $\mathbf{g} :]0, 2\pi[\to \partial M$ dada por

$$\mathbf{g}(\theta) = (\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta, 0)$$

e claramente a orientação induzida por esta parametrização é ν. Pelo teorema de Stokes, concluímos que

$$
\begin{aligned}
\int_{M^\mu}(1+z^2)dx\wedge dy &= \int_{M^\mu}(2-x^2-y^2)dx\wedge dy\\
&= \int_{\partial M^\nu}\frac{1}{3}y^3dx+\left(2x-\frac{1}{3}x^3\right)dy\\
&= \int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3\theta d(\cos\theta)+\left(2\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right)d(\operatorname{sen}\theta)\\
&= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{3}\left(\operatorname{sen}^4\theta+\cos^4\theta\right)+2\cos^2\theta\right)d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{3}\left(1-2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta\right)+2\cos^2\theta\right)d\theta\\
&\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2(2\theta)\right)+2\cos^2\theta\right)d\theta\\
&= -\frac{1}{3}\left(2\pi-\frac{1}{2}\pi\right)+2\pi=\frac{3\pi}{2},
\end{aligned}
$$

onde usámos a identidade

$$\cos^4\theta+\operatorname{sen}^4\theta=\left(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta\right)^2-2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta=1-2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta.$$

8. Seja $M=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : w^2+1=x^2+y^2+z^2, 0\leq w\leq 2\}$. Calcule $\int_{M^\mu}dx\wedge dy\wedge dz$ onde μ é a orientação de M dada pela normal que aponta na direcção do eixo dos ww.

   Resolução:

   Seja
   $$V=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : w^2+1\geq x^2+y^2+z^2, 0\leq w\leq 2\}.$$
   Então V é um conjunto compacto e
   $$\partial V=M\bigcup T_1\bigcup T_2$$
   onde
   $$T_1=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : w^2+1\geq x^2+y^2+z^2, w=0\}=\{(x,y,z,0)\in\mathbb{R}^4 : x^2+y^2+z^2\leq 1\}$$
   e
   $$T_2=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : w^2+1\geq x^2+y^2+z^2, w=2\}=\{(x,y,z,2)\in\mathbb{R}^4 : x^2+y^2+z^2\leq 5\}.$$
   Uma vez que $d(dx\wedge dy\wedge dz)=0$, pelo teorema de Stokes tem-se
   $$\int_{\partial V}dx\wedge dy\wedge dz=0$$
   qualquer que seja a orientação escolhida para ∂V. Pela aditividade do integral conclui-se que
   $$\int_{M^\mu}dx\wedge dy\wedge dz+\int_{T_1^\mu}dx\wedge dy\wedge dz+\int_{T_2^\mu}dx\wedge dy\wedge dz=0$$

onde μ designa a orientação determinada em cada hipersuperfície pela normal interior a V.

O espaço tangente a T_1 e T_2 é, em qualquer ponto, $\{(x,y,z,0) \in \mathbb{R}^4\}$ pelo que $dx \wedge dy \wedge dz$ é um elemento de volume para T_1 e T_2. Resta saber se é o elemento de volume compatível com as orientações μ. A normal unitária interior a T_1 é $(0,0,0,1)$, logo o elemento de volume correspondente à orientação determinada por esta normal é $(-1)^{4-1}1dx \wedge dy \wedge dz = -dx \wedge dy \wedge dz$. Da mesma forma vemos que o elemento de volume para T_2 determinado pela orientação μ é $dx \wedge dy \wedge dz$. Assim, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_{M^\mu} dx \wedge dy \wedge dz &= -\int_{T_1^\mu} dx \wedge dy \wedge dz - \int_{T_2^\mu} dx \wedge dy \wedge dz \\
&= \int_{T_1^\mu} -dx \wedge dy \wedge dz - \int_{T_2^\mu} dx \wedge dy \wedge dz \\
&= \int_{T_1} dxdydz - \int_{T_2} dxdydz \\
&= V_3(T_1) - V_3(T_2) \\
&= \frac{4\pi}{3} - \frac{4\pi}{3}\sqrt{5}^3.
\end{aligned}$$

9. Seja
$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$
Calcule o fluxo do campo vectorial
$$\mathbf{F}(x,y,z) = (-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, 0, 0)$$
através de ∂V no sentido da normal exterior a V.

Resolução:

Não se pode aplicar directamente o teorema da divergência porque $\mathbf{F}$ não é de classe C^1 em V. No entanto, podemos aplicar o teorema da divergência a regiões
$$V_\epsilon = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \epsilon^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$
e passar ao limite quando $\epsilon \to 0$:

Temos $\partial V = T_1 \bigcup T_2 \bigcup T_3 \bigcup S$, onde
$$\begin{aligned}
T_1 &= \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}; \\
T_2 &= \{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2+z^2 \leq 1, y \geq 0, z \geq 0\}; \\
T_3 &= \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+z^2 \leq 1, x \geq 0, z \geq 0\}; \\
S &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\},
\end{aligned}$$

Temos também $\partial V_\epsilon = T_{1,\epsilon} \bigcup T_{2,\epsilon} \bigcup T_{3,\epsilon} \bigcup S \bigcup S_\epsilon$, onde $T_{i,\epsilon}$ designa a porção de T_i a uma distância $\geq \epsilon$ da origem, e
$$S_\epsilon = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = \epsilon^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

O campo $\mathbf{F}$ é paralelo a T_1 e T_3, pelo que trivialmente temos para $i = 1, 3$

$$0 = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{T_{i,\epsilon}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \int_{T_i} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}.$$

Por outro lado $\mathbf{F}$ é perpendicular a T_2 pelo que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{T_{2,\epsilon}} \mathbf{F} \cdot (-1, 0, 0) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{T_{2,\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}} dV_2.$$

Uma vez que a função $\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}$ é integrável em T_2 (como fácilmente se verifica utilizando coordenadas polares), pelo teorema da convergência monótona conclui-se que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{T_{2,\epsilon}} \mathbf{F} \cdot (-1, 0, 0) = \int_{T_2} \mathbf{F} \cdot (-1, 0, 0).$$

Finalmente, tem-se

$$\begin{aligned}
\left| \int_{S_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \right| &\leq \int_{S_\epsilon} |\mathbf{F}| dV_2 \\
&= \int_{S_\epsilon} \frac{1}{\epsilon} dV_2 \\
&= \frac{4\pi\epsilon^2}{8} \frac{1}{\epsilon} \\
&= \frac{\pi\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

pelo que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{S_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Uma vez que podemos aplicar o teorema da divergência a V_ϵ, conclui-se que

$$\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial V_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{V_\epsilon} \nabla \cdot \mathbf{F}.$$

Ora

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

logo, usando coordenadas esféricas, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{V_\epsilon} \nabla \cdot \mathbf{F} &= \int_{V_\epsilon} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dV_3 \\
&= \int_\epsilon^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi}{r^3} r^2 \operatorname{sen} \theta d\theta d\varphi dr \\
&= (1 - \epsilon) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \theta d\theta \right) \\
&= (1 - \epsilon) \frac{\pi}{4},
\end{aligned}$$

e portanto

$$\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{\pi}{4}.$$

10. Seja $V \subset \mathbb{R}^3$ uma variedade-3 com bordo compacta e $\phi : V \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}^3$ uma aplicação de classe C^1, tal que para cada $t \in [0, +\infty[$ a aplicação $\phi_t : V \to \mathbb{R}^3$ dada por $\phi_t(x, y, z) = \phi(x, y, z, t)$ é injectiva e com derivada injectiva. ϕ modela a evolução de uma porção de fluido com o tempo: no instante t, o fluido ocupa a posição $\phi_t(V)$ em $\mathbb{R}^3$.

O campo vectorial $\mathbf{v}_t : \phi_t(V) \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$\mathbf{v}_t(\phi_t(x, y, z)) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, y, z, t).$$

designa-se por campo de velocidades do fluido.

Prove o **Teorema de Liouville:** Se $\nabla \cdot \mathbf{v}_t = 0$ então para todo o $T \geq 0$, tem-se

$$V_3(\phi_T(V)) = V_3(\phi_0(V)).$$

Isto é, se a divergência do campo de velocidades é 0, então o volume ocupado pela porção de fluido mantém-se constante.

Resolução:

Começamos por observar que $\psi : V \times [0, T] \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$\psi(x, y, z, t) = (\phi(x, y, z, t), t)$$

parametriza uma variedade com bordo M cujo bordo é

$$\partial M = \phi_0(V) \times \{0\} \bigcup \psi(\partial V \times [0, T]) \bigcup \phi_T(V) \times \{T\}.$$

e que

$$\mathbf{v} \equiv \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\mathbf{v}_t, 1).$$

Uma vez que a última componente de $\mathbf{v}$ é constante, temos $\nabla \cdot \mathbf{v}_t = \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Além disso, uma vez que $(0, 0, 0, \pm 1)$ são as normais unitárias a $\phi_0(V) \times \{0\}$ e $\phi_T(V) \times \{T\}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} V_3(\phi_T(V)) - V_3(\phi_0(V)) &= \int_{\phi(V \times \{0\})} \mathbf{v} \cdot (0, 0, 0, -1) + \int_{\phi(V \times \{T\})} \mathbf{v} \cdot (0, 0, 0, 1) \\ &= \int_{\phi(V \times \{0\})} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + \int_{\phi(V \times \{T\})} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \end{aligned}$$

onde $\mathbf{n}$ designa a normal exterior a M. Uma vez que $\mathbf{v} = \frac{\partial \psi}{\partial t}$ é claramente tangente a $\psi(\partial V \times [0, T])$ (se fixarmos $(x, y, z) \in \partial V$ então $\psi(x, y, z, t)$ descreve uma curva em $\psi(\partial V \times [0, T])$), obtemos do Teorema da Divergência

$$\begin{aligned} V_3(\phi_T(V)) - V_3(\phi_0(V)) &= \int_{\phi(V \times \{0\})} \mathbf{v} \cdot (0, 0, 0, -1) + \int_{\phi(V \times \{T\})} \mathbf{v} \cdot (0, 0, 0, 1) \\ &= \int_{\partial M} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dV_3 - \int_{\psi(\partial V \times [0, T])} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dV_3 \\ &= \int_M \nabla \cdot \mathbf{v} \, dV_4 - 0 = 0, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração.