

# Resumos de AMIII

11 de Dezembro de 2002

## 1. Revisões de Cálculo Diferencial

1. Se  $U \subset \mathbb{R}^n$  é aberto,  $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função (portanto  $\mathbf{f} = (f^1, \dots, f^m)$ ),  $\mathbf{x}_0 \in U$  e  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ , então a *derivada direccional* de  $\mathbf{f}$  segundo  $\mathbf{v}$  no ponto  $\mathbf{x}_0$  é

$$\partial_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{t} = \frac{d}{dt}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})|_{t=0}$$

(caso o limite exista).

2. A  $i$ -ésima *derivada parcial* de  $\mathbf{f}$  é

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x^i} \equiv \partial_i \mathbf{f} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^i} \\ \dots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^i} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \partial_i f^1 \\ \dots \\ \partial_i f^m \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_{\mathbf{e}_i} \mathbf{f}.$$

3.  $\mathbf{f}$  diz-se *diferenciável* em  $\mathbf{x}_0$  se existe uma transformação linear  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  (representada por uma matriz  $m \times n$ ) tal que

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0}.$$

4. Se  $\mathbf{f}$  é diferenciável em  $\mathbf{x}_0$  então

$$\partial_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = D_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}.$$

Em particular,  $D\mathbf{f}$  é representada na base canónica pela *matriz Jacobiana*

$$D\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 f^1 & \dots & \partial_n f^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_1 f^m & \dots & \partial_n f^m \end{bmatrix}.$$

5.  $\mathbf{f}$  diz-se de classe  $C^1$  se as derivadas parciais  $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$  ( $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ ) são funções contínuas.
6.  $\mathbf{f} \in C^1 \Rightarrow \mathbf{f}$  diferenciável.

7. Se  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é diferenciável em  $\mathbf{x}_0 \in U$ , e  $g : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  é diferenciável em  $f(\mathbf{x}_0) \in V$ , então  $g \circ f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  é diferenciável em  $\mathbf{x}_0$  e

$$D(g \circ f)(\mathbf{x}_0) = Dg(f(\mathbf{x}_0))Df(\mathbf{x}_0).$$

Em coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$  em  $\mathbb{R}^n$  e  $(y^1, \dots, y^m)$  em  $\mathbb{R}^m$ , tem-se

$$\frac{\partial g^i}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g^i}{\partial y^k} \frac{\partial f^k}{\partial x^j}$$

(regra da cadeia).

8. Derivadas parciais de ordem superior:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) = \partial_i \partial_j f;$$

$f$  diz-se de classe  $C^2$  se todas as derivadas parciais de segunda ordem são funções contínuas.

9. Lema de Schwarz:  $f \in C^2 \Rightarrow \partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$ .

## 2. Função Inversa e Função Implícita

1. O jacobiano da função diferenciável  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a função

$$Jf(\mathbf{x}) = \det Df(\mathbf{x}).$$

2. Teorema da Função Inversa: Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) e  $\mathbf{x}_0 \in D$  tal que  $Jf(\mathbf{x}_0) \neq 0$ . Então  $f$  é localmente  $C^k$ -invertível, i.e.:

- (i) Existe um conjunto aberto  $U \subset D$  contendo  $\mathbf{x}_0$  tal que  $f|_U$  é injectiva;
- (ii)  $V = f(U)$  é aberto;
- (iii)  $f^{-1} : V \rightarrow U$  é de classe  $C^k$ .

Além disso,  $Df^{-1}(f(\mathbf{x})) = [Df(\mathbf{x})]^{-1}$  para  $\mathbf{x} \in U$ .

3. Seja  $F \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto fechado. Uma função  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$  diz-se uma *contracção* se  $f(F) \subset F$  e existe  $c < 1$  tal que

$$\|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)\| \leq c \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$$

(em particular,  $f$  é contínua).

4. Seja  $A$  um conjunto e  $f : A \rightarrow A$  uma função.  $x \in A$  diz-se um *ponto fixo* de  $f$  se  $f(x) = x$ .
5. Teorema do ponto fixo: Uma contracção possui um e um só ponto fixo.
6. Uma função  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é contínua sse a imagem inversa de qualquer aberto é um aberto.
7. Teorema da Função Implícita: Seja  $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) e  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in D$  tal que  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$  e  $\det \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0$ . Então existe uma vizinhança aberta  $U \times V \ni (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  e uma função de classe  $C^k$   $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$  tais que

$$\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V : \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}\} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V : \mathbf{y} = f(\mathbf{x})\}.$$

8. Nas condições do Teorema da Função Implícita, a matriz Jacobiana de  $\mathbf{f}$  em  $\mathbf{x}_0$  pode ser calculada a partir de

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \cdot D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0.$$

### 3. Variedades Diferenciáveis

1. O gráfico de uma função  $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  é o conjunto

$$\text{Graf}(\mathbf{f}) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \in D \text{ e } \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\}.$$

2. Um conjunto  $M \subset \mathbb{R}^n$  é uma *variedade diferenciável de dimensão*  $m \in \{0, \dots, n\}$  e classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) se para qualquer ponto  $\mathbf{x}_0 \in M$  existe uma vizinhança  $U \ni \mathbf{x}_0$  e uma função de classe  $C^k$   $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  ( $D$  aberto) tais que

$$M \cap U = \text{Graf}(\mathbf{f}) \cap U$$

para alguma ordenação das funções coordenadas de  $\mathbb{R}^n$ .

3. Uma variedade de dimensão 0 é simplesmente um conjunto de pontos isolados; uma variedade de dimensão  $n$  é simplesmente um conjunto aberto.
4.  $M \subset \mathbb{R}^n$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $m$  e classe  $C^k$  sse para qualquer ponto  $\mathbf{x}_0 \in M$  existe uma vizinhança  $U \ni \mathbf{x}_0$  e uma função de classe  $C^k$   $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  tais que
- (i)  $M \cap U = \{\mathbf{x} \in U : \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ ;
  - (ii)  $\text{rank } D\mathbf{F}(\mathbf{x}) = n - m$  (i.e., é máxima) para todo o  $\mathbf{x} \in U$ .

5. Um *caminho* em  $\mathbb{R}^n$  é simplesmente uma função contínua  $\mathbf{g} : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

6. Um vector  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  diz-se um *vector tangente* à variedade diferenciável  $M$  no ponto  $\mathbf{x}_0$  se existe um caminho diferenciável  $\mathbf{g} : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow M$  tal que  $\mathbf{g}(0) = \mathbf{x}_0$  e  $\frac{d\mathbf{g}}{dt}(0) = \mathbf{v}$ .

7. Se  $M \subset \mathbb{R}^n$  é uma variedade de dimensão  $m$ , o conjunto  $T_{\mathbf{x}_0}M$  de todos os vectores tangentes a  $M$  no ponto  $\mathbf{x}_0 \in M$  é um espaço vectorial de dimensão  $m$ , dito o *espaço tangente* a  $M$  no ponto  $\mathbf{x}_0$ . O seu complemento ortogonal  $T_{\mathbf{x}_0}^\perp M$  é um espaço vectorial de dimensão  $n - m$ , dito o *espaço normal* a  $M$  no ponto  $\mathbf{x}_0$ .

8. Sejam  $M \subset \mathbb{R}^n$  uma variedade de dimensão  $m$ ,  $\mathbf{x}_0 \in M$ ,  $U \ni \mathbf{x}_0$  aberto e  $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  tais que  $M \cap U = \{\mathbf{x} \in U : \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$  com  $\text{rank } D\mathbf{F}(\mathbf{x}) = n - m$  para todo o  $\mathbf{x} \in U$ . Então

$$T_{\mathbf{x}_0}^\perp M = \text{span}\{\nabla F^1(\mathbf{x}_0), \dots, \nabla F^m(\mathbf{x}_0)\}.$$

9. *Teorema dos Extremos Condicionados:* Sejam  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável,  $M \subset \mathbb{R}^n$  uma variedade de dimensão  $m$ ,  $\mathbf{x}_0 \in M$ ,  $U \ni \mathbf{x}_0$  aberto e  $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  tais que  $M \cap U = \{\mathbf{x} \in U : \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$  com  $\text{rank } D\mathbf{F}(\mathbf{x}) = n - m$  para todo o  $\mathbf{x} \in U$ . Se a restrição de  $f$  a  $M$  tem um extremo local em  $\mathbf{x}_0 \in M$  então  $\nabla f(\mathbf{x}_0) \in T_{\mathbf{x}_0}^\perp M$ .

10. *Regra dos Multiplicadores de Lagrange:* Nas condições do teorema anterior, existem constantes  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-m} \in \mathbb{R}$  (ditas os *multiplicadores de Lagrange*) tais que

$$\nabla(f + \lambda_1 F^1 + \dots + \lambda_{n-m} F^{n-m})(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

#### 4. Integração em $\mathbb{R}^n$

1.  $I \subset \mathbb{R}^n$  é um *intervalo* se  $I = I_1 \times \dots \times I_n$ , onde cada  $I_k$  é um intervalo de  $\mathbb{R}$ .  $I$  é limitado/aberto/fechado sse cada  $I_k$  é limitado/aberto/fechado. Se  $I$  é um intervalo compacto com  $I_k = [a_k, b_k]$ , o seu *volume  $n$ -dimensional* é

$$V_n(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n).$$

Uma *partição* do intervalo compacto  $I \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto finito  $P = P_1 \times \dots \times P_n$ , onde cada  $P_k$  é uma partição do intervalo  $I_k = [a_k, b_k]$  (i.e.,  $P_k$  é um subconjunto finito de  $I_k$  contendo  $a_k, b_k$ ). Uma partição de  $I$  subdivide  $I$  num número finito de subintervalos  $J_\alpha$ . Uma função  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se uma *função em escada* se existe uma partição  $P$  de  $I$  tal que  $s$  é constante (igual a  $s_\alpha$ ) no interior de cada subintervalo  $J_\alpha$ , sendo o seu *integral* o número real

$$\int_I s = \sum_\alpha s_\alpha V_n(J_\alpha).$$

2. Seja  $I \subset \mathbb{R}^n$  um intervalo compacto e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função *limitada*. O *integral superior* de  $f$  em  $I$  é o número real

$$\overline{\int}_I f = \inf \left\{ \int_I t : t \text{ é em escada e } t(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in I \right\}.$$

O *integral inferior* de  $f$  em  $I$  é o número real

$$\underline{\int}_I f = \sup \left\{ \int_I s : s \text{ é em escada e } s(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in I \right\}.$$

A função  $f$  diz-se *integrável à Riemann* em  $I$  se os seus integrais superior e inferior coincidem, e nesse caso define-se o seu *integral* como sendo

$$\int_I f = \underline{\int}_I f = \overline{\int}_I f.$$

As seguintes notações são também utilizadas para o integral de  $f$ :

$$\int_I f = \int_I f dV_n = \int_I f(\mathbf{x}) dV_n(\mathbf{x}) = \int_I f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n.$$

3. O conjunto  $R(I)$  de todas as funções integráveis à Riemann no intervalo compacto  $I \subset \mathbb{R}^n$  é um espaço vectorial, e a aplicação

$$R(I) \ni f \mapsto \int_I f \in \mathbb{R}$$

é linear.

4. *Teorema de Fubini*: Sejam  $A \subset \mathbb{R}^n$  e  $B \subset \mathbb{R}^m$  intervalos compactos e  $F : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável à Riemann. Então

$$\begin{aligned} \int_{A \times B} f &= \int_A \left( \int_B f_{\mathbf{x}} \right) dV_n(\mathbf{x}) = \int_A \left( \overline{\int}_B f_{\mathbf{x}} \right) dV_n(\mathbf{x}) \\ &= \int_B \left( \int_A f_{\mathbf{y}} \right) dV_m(\mathbf{y}) = \int_B \left( \overline{\int}_A f_{\mathbf{y}} \right) dV_m(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

onde  $f_x : B \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f_y : A \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazem  $f_x(\mathbf{y}) = f_y(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  e todos os integrais acima existem.

5. Diz-se que  $A \subset \mathbb{R}^n$  tem *medida nula* se para todo o  $\varepsilon > 0$  existe uma família numerável de intervalos  $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} V_n(I_k) < \varepsilon.$$

6. *Propriedades de conjuntos de medida nula:*

- (i) Um subconjunto de um conjunto de medida nula tem medida nula;
- (ii) A união de uma família numerável de conjuntos de medida nula tem medida nula;
- (iii) O gráfico de uma função contínua  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tem medida nula em  $\mathbb{R}^{m+n}$ .

7. Uma família  $\{U_\alpha\}$  de subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  diz-se uma *cobertura* de  $A \subset \mathbb{R}^n$  se  $A \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$ . A cobertura diz-se *aberta* se cada um dos conjuntos  $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$  é aberto. Uma *subcobertura* de  $\{U_\alpha\}$  é uma subfamília de  $\{U_\alpha\}$  que é ainda uma cobertura de  $A$ .

8. *Teorema de Heine-Borel:*  $K \subset \mathbb{R}^n$  é compacto sse toda a cobertura aberta de  $K$  admite uma subcobertura finita.

9. Uma função  $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  diz-se *uniformemente contínua* em  $D$  se para todo o  $\delta > 0$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que para todo o  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$  se tem

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \varepsilon \Rightarrow \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| < \delta.$$

10. *Teorema de Heine-Cantor:* Se  $K \subset \mathbb{R}^n$  é compacto e  $\mathbf{f} : K \rightarrow \mathbb{R}^m$  é contínua então  $\mathbf{f}$  é uniformemente contínua em  $K$ .

11. A *oscilação* da função limitada  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  no conjunto  $A \subset D$  é o número real

$$o(f, A) = \sup_{\mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}) - \inf_{\mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}).$$

A *oscilação* de  $f$  no ponto  $\mathbf{x} \in D$  é o número real

$$o(f, \mathbf{x}) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} o(f, B_\delta(\mathbf{x})).$$

A função  $f$  é contínua em  $\mathbf{x} \in D$  sse  $o(f, \mathbf{x}) = 0$ .

12. Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$  e  $P(\mathbf{x})$  uma proposição dependente de  $\mathbf{x} \in A$ . Diz-se que  $P(\mathbf{x})$  é *verdadeira quase em toda a parte (q.t.p.)* em  $A$  se o conjunto  $\{\mathbf{x} \in A : P(\mathbf{x}) \text{ é falsa}\}$  tem medida nula.

13. *Critério de integrabilidade de Lebesgue:* Seja  $I \subset \mathbb{R}^n$  um intervalo compacto. Uma função limitada  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável à Riemann em  $I$  sse é contínua q.t.p. em  $I$ .

14. Seja  $I \subset \mathbb{R}^n$  um intervalo. A *função característica* do conjunto  $A \subset I$  é a função  $\chi_A : I \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\chi_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x} \in A \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \notin A \end{cases}$$

15. Seja  $I \subset \mathbb{R}^n$  um intervalo compacto. Um conjunto  $A \subset I$  diz-se *mensurável à Jordan* em  $I$  se  $\chi_A$  é integrável à Riemann em  $I$ , e o *volume  $n$ -dimensional* de  $A$  é

$$V_n(A) = \int_I \chi_A.$$

Se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável à Riemann em  $I$ , define-se

$$\int_A f = \int_I f \chi_A$$

(portanto  $V_n(A) = \int_A 1$ ).

16. A família  $J(I)$  de todos os subconjuntos do intervalo compacto  $I$  que são mensuráveis à Jordan é uma *álgebra de conjuntos* em  $I$ , i.e.,

- (i)  $I \in J(I)$ ;
- (ii)  $A \in J(I) \Rightarrow I \setminus A \in J(I)$ ;
- (iii)  $A, B \in J(I) \Rightarrow A \cap B \in J(I)$ .

17. Um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  é mensurável à Jordan sse é limitado e a sua fronteira tem medida nula.

18. O *suporte* de uma função  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é o conjunto

$$\text{supp}(\varphi) = \overline{\varphi^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})}.$$

19. *Teorema da partição da unidade*: Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{O}$  uma cobertura aberta de  $A$ . Então existe uma família  $\Phi$  de funções  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  e suporte compacto com as seguintes propriedades:

- (i) Para cada  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  tem-se  $0 \leq \varphi(\mathbf{x}) \leq 1$ ;
- (ii) Para cada  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  existe um aberto  $U_{\mathbf{x}} \ni \mathbf{x}$  tal que apenas finitas funções  $\varphi \in \Phi$  não se anulam em  $U_{\mathbf{x}}$ ;
- (iii) Para cada  $\mathbf{x} \in A$  temos

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(\mathbf{x}) = 1$$

(por (ii) esta soma faz sentido);

- (iv) Para cada  $\varphi \in \Phi$  existe um aberto  $U \in \mathcal{O}$  tal que  $\text{supp}(\varphi) \subset U$ .

( $\Phi$  diz-se uma *partição da unidade para  $A$  subordinada a  $\mathcal{O}$* ).

20. Qualquer partição da unidade para um compacto  $A \subset \mathbb{R}^n$  é finita; qualquer partição da unidade para um aberto  $A \subset \mathbb{R}^n$  é numerável.

21. Uma cobertura aberta  $\mathcal{O}$  do aberto  $A \subset \mathbb{R}^n$  diz-se *admissível* se  $A = \bigcup_{U \in \mathcal{O}} U$ .

22. Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$  aberto,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  contínua q.t.p. em  $A$  e limitada em cada compacto contido em  $A$ . Seja  $\mathcal{O}$  uma cobertura admissível de  $A$  e  $\Phi$  uma partição da unidade para  $A$  subordinada a  $\mathcal{O}$ . Diz-se que  $f$  é *integrável* em  $A$  se a série de termos não negativos

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi |f|$$

converge. Se  $f$  é integrável, o seu *integral* é a soma da série absolutamente convergente

$$\int_A f = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi f.$$

23. (i) Se  $\Psi$  é outra partição da unidade subordinada à cobertura admissível  $\mathcal{O}'$  de  $A$ , então

$$\sum_{\psi \in \Psi} \int_A \psi |f|$$

também converge e

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi f = \sum_{\psi \in \Psi} \int_A \psi f$$

(i.e., a definição acima não depende da escolha da partição da unidade para  $A$ ).

- (ii) Se  $A$  e  $f$  são limitados então  $f$  é integrável em  $A$ .  
 (iii) Se  $A$  é mensurável à Jordan e  $f$  é limitada então  $\int_A f$  determinado de acordo com a definição acima coincide com o valor para  $\int_A f$  definido anteriormente (i.e., a definição acima é uma extensão da noção de integral de Riemann num aberto mensurável à Jordan).
24. Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$  aberto. Uma *transformação de coordenadas* em  $A$  é uma função  $\mathbf{g} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  injectiva, de classe  $C^1$  e tal que  $J\mathbf{g}(\mathbf{x}) \neq 0$  para todo o  $\mathbf{x} \in A$ .
25. *Teorema de mudança de variáveis*: Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$  aberto,  $\mathbf{g} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma transformação de coordenadas e  $f : \mathbf{g}(A) \rightarrow \mathbb{R}$  integrável. Então

$$\int_{\mathbf{g}(A)} f = \int_A (f \circ \mathbf{g}) |J\mathbf{g}|.$$

26. *Coordenadas polares* em  $\mathbb{R}^2$ : São as coordenadas  $(r, \theta) \in ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[$  relacionadas com as coordenadas Cartesianas usuais  $(x, y)$  mediante a mudança de coordenadas

$$(x, y) = \mathbf{g}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

O Jacobiano desta transformação é

$$J\mathbf{g}(r, \theta) = r.$$

27. *Coordenadas cilíndricas* em  $\mathbb{R}^3$ : São as coordenadas  $(r, \theta, z) \in ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R}$  relacionadas com as coordenadas Cartesianas usuais  $(x, y, z)$  mediante a mudança de coordenadas

$$(x, y, z) = \mathbf{g}(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z).$$

O Jacobiano desta transformação é

$$J\mathbf{g}(r, \theta, z) = r.$$

28. *Coordenadas esféricas* em  $\mathbb{R}^3$ : São as coordenadas  $(r, \theta, \varphi) \in ]0, +\infty[ \times ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[$  relacionadas com as coordenadas Cartesianas usuais  $(x, y, z)$  mediante a mudança de coordenadas

$$(x, y, z) = \mathbf{g}(r, \theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta).$$

O Jacobiano desta transformação é

$$J\mathbf{g}(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin \theta.$$

29. Se  $A$  é mensurável à Jordan e é dada uma *função densidade de massa*  $\rho : A \rightarrow \mathbb{R}^+$ , integrável à Riemann em  $A$ , define-se:

(i) O *volume*  $n$ -dimensional de  $A$ :

$$V = V_n(A) = \int_A 1 dV_n.$$

(ii) A *massa* de  $A$ :

$$M = \int_A \rho dV_n.$$

(iii) A coordenada  $k$  do *centro de massa* de  $A$ :

$$x_{CM}^k = \frac{1}{M} \int_A x^k \rho dV_n.$$

(iv) A coordenada  $k$  do *centróide* de  $A$ :

$$x_C^k = \frac{1}{V} \int_A x^k dV_n.$$

(v) O *momento de inércia* de  $A$  em relação ao eixo  $\mathbb{R}e_k$ :

$$I_k = \int_A \sum_{i \neq k} (x^i)^2 \rho dV_n.$$

30. *Regra de Leibnitz*: Seja  $I \subset \mathbb{R}^n$  um intervalo compacto e  $f : I \times ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal que  $\partial_{n+1} f$  existe e é contínua. Então a função  $F : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(t) = \int_I f(\mathbf{x}, t) dV_n(\mathbf{x})$$

é de classe  $C^1$  e

$$F'(t) = \int_I \partial_{n+1} f(\mathbf{x}, t) dV_n(\mathbf{x}).$$

## 5. Formas diferenciais

1. O *dual* de  $\mathbb{R}^n$  é

$$(\mathbb{R}^n)^* = \{\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \omega \text{ é linear}\}.$$

Os elementos de  $(\mathbb{R}^n)^*$  dizem-se *1-covectores*.

2.  $(\mathbb{R}^n)^*$  é um espaço vectorial de dimensão  $n$ . Uma base para  $(\mathbb{R}^n)^*$  é

$$\{dx^1, \dots, dx^n\}$$

onde o 1-covector  $dx^i$  é definido por

$$dx^i(v^1 \mathbf{e}_1 + \dots + v^n \mathbf{e}_n) = v^i,$$

ou seja,

$$dx^i(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

( $\delta_{ij}$  diz-se o *delta de Kronecker*.)



3. Um  $k$ -tensor (covariante) é uma aplicação  $T : (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$  multilinear, i.e., tal que

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i, \dots, \mathbf{v}_k) &= T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_k) + T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{w}_i, \dots, \mathbf{v}_k); \\ T(\mathbf{v}_1, \dots, \lambda \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_k) &= \lambda T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_k) \end{aligned}$$

( $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ ).  $T^k(\mathbb{R}^n)$  designa o conjunto de todos os  $k$ -tensores em  $\mathbb{R}^n$ .

4. Um  $k$ -tensor  $\omega \in T^k(\mathbb{R}^n)$  diz-se *alternante*, ou um  $k$ -covector, se

$$\omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_k) = -\omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_k)$$

( $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n, 1 \leq i < j \leq n$ ).  $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$  designa o conjunto de todos os  $k$ -covectores em  $\mathbb{R}^n$ .

5.  $T^k(\mathbb{R}^n)$  é um espaço vectorial e  $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$  é um subespaço vectorial de  $T^k(\mathbb{R}^n)$ .

6. Se  $S \in T^k(\mathbb{R}^n)$  e  $T \in T^l(\mathbb{R}^n)$ , o seu *produto tensorial*  $S \otimes T \in T^{k+l}(\mathbb{R}^n)$  é dado por

$$S \otimes T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l) = S(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) T(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l)$$

( $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l \in \mathbb{R}^n$ ).

7. *Propriedades do produto tensorial:* Se  $S, T, U$  são tensores e  $\lambda \in \mathbb{R}$  então

- (i)  $(S + T) \otimes U = S \otimes U + T \otimes U$ ;
- (ii)  $S \otimes (T + U) = S \otimes T + S \otimes U$ ;
- (iii)  $(\lambda S) \otimes T = \lambda(S \otimes T) = S \otimes (\lambda T)$ ;
- (iv)  $S \otimes (T \otimes U) = (S \otimes T) \otimes U$ ;
- (v)  $S \otimes T \neq T \otimes S$  (em geral).

8.  $\dim(T^k(\mathbb{R}^n)) = n^k$ , e uma base é  $\{dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}\}_{i_1, \dots, i_k=1}^n$ .

9. Se  $T \in T^k(\mathbb{R}^n)$ , define-se

$$\text{Alt}(T)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) T(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma(k)})$$

10. *Propriedades de Alt:*

- (i) Se  $T \in T^k(\mathbb{R}^n)$  então  $\text{Alt}(T) \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ ;
- (ii)  $\text{Alt} : T^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$  é linear;
- (iii) Se  $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$  então  $\text{Alt}(\omega) = \omega$ .

(Por outras palavras,  $\text{Alt} : T^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$  é uma projecção).

11. Se  $\omega$  é um  $k$ -covector e  $\eta$  é um  $l$ -covector, o seu *produto exterior* é o  $(k+l)$ -covector

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta).$$

12. *Propriedades do produto exterior:*

- (i)  $\omega \wedge (\alpha + \beta) = \omega \wedge \alpha + \omega \wedge \beta$ ;
- (ii)  $\omega \wedge (c\eta) = c(\omega \wedge \eta)$  com  $c \in \mathbb{R}$ ;
- (iii)  $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$  para  $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n), \eta \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n)$ ;

(iv)  $\omega \wedge (\alpha \wedge \beta) = (\omega \wedge \alpha) \wedge \beta$ .

13.  $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \det \begin{bmatrix} dx^{i_1}(\mathbf{v}_1) & \dots & dx^{i_1}(\mathbf{v}_k) \\ \dots & \dots & \dots \\ dx^{i_k}(\mathbf{v}_1) & \dots & dx^{i_k}(\mathbf{v}_k) \end{bmatrix}$

14.  $\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ , e uma base é  $\{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$ .

15. Uma *forma diferencial* de grau  $k$  e classe  $C^q$  no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  é uma função  $\omega : U \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$  de classe  $C^q$  (i.e.,  $\omega(\mathbf{x}) \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$  para todo o  $\mathbf{x} \in U$ ). O conjunto das formas- $k$  de classe  $C^\infty$  em  $U \subset \mathbb{R}^n$  designa-se por  $\Omega^k(U)$ .

16. Se  $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$  são abertos,  $\mathbf{f} : U \rightarrow V$  é  $C^\infty$  e  $\omega \in \Omega^k(V)$  então o *pull-back* de  $\omega$  por  $\mathbf{f}$  é a forma- $k$   $\mathbf{f}^*\omega \in \Omega^k(U)$  definida por

$$\mathbf{f}^*\omega(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \omega(\mathbf{f}(\mathbf{x}))(D\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{v}_1, \dots, D\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{v}_k)$$

para  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ .

17. *Propriedades do pull-back:*

(i)  $\mathbf{f}^*(\omega + \eta) = \mathbf{f}^*\omega + \mathbf{f}^*\eta$ ;

(ii)  $\mathbf{f}^*(\omega \wedge \eta) = \mathbf{f}^*\omega \wedge \mathbf{f}^*\eta$ ;

(iii)  $\mathbf{f}^*\mathbf{g}^*\omega = (\mathbf{g} \circ \mathbf{f})^*(\omega)$ .

18. Se  $U \subset \mathbb{R}^n$  é aberto e  $\omega \in \Omega^k(U)$ ,

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k}(\mathbf{x}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

a sua *derivada exterior*  $d\omega \in \Omega^{k+1}(U)$  é dada por

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{i=1}^n \partial_i \omega_{i_1 \dots i_k}(\mathbf{x}) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

19. *Propriedades da derivada exterior:*

(i)  $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$ ;

(ii)  $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$ , onde  $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ ;

(iii)  $d(d\omega) = 0$  (abreviadamente,  $d^2 = 0$ );

(iv)  $d(\mathbf{f}^*\omega) = \mathbf{f}^*(d\omega)$ .

20. Por definição,  $\Lambda^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ , e portanto as formas-0 num aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  são as funções  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$ . Se  $g \in \Omega^0(U)$ ,  $\omega \in \Omega^k(U)$  e  $\mathbf{f} : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U$  é de classe  $C^\infty$ ,

(i)  $g \wedge \omega = g\omega$ ;

(ii)  $\mathbf{f}^*g = g \circ \mathbf{f}$ ;

(iii)  $dg = \frac{\partial g}{\partial x^1} dx^1 + \dots + \frac{\partial g}{\partial x^n} dx^n$ .

(em particular,  $d(x^i) = dx^i$ , o que justifica esta notação).

21. Se  $U \subset \mathbb{R}^n$  é aberto,  $\omega \in \Omega^k(U)$  diz-se *fechada* se  $d\omega = 0$ , e *exacta* se existe uma forma  $\alpha \in \Omega^{k-1}(U)$  tal que  $\omega = d\alpha$  ( $\alpha$  diz-se então um *potencial* para  $\omega$ ).
22.  $\omega$  exacta  $\Rightarrow \omega$  fechada.
23.  $A \subset \mathbb{R}^n$  diz-se *em estrela* se existe um ponto  $\mathbf{x}_0 \in A$  (dito o *centro*) tal que  $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}] \subset A$  para todo o  $\mathbf{x} \in A$ , onde

$$[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}] = \{\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) : t \in [0, 1]\}$$

designa o segmento de recta de extremos  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{x}$ .

24. *Lema de Poincaré:* Seja  $\omega \in \Omega^k(U)$ , onde  $U \subset \mathbb{R}^n$  é aberto. Se  $U$  é em estrela e  $\omega$  é fechada, então  $\omega$  é exacta.

## 6. Integrais de Formas Diferenciais

- Seja  $M \subset \mathbb{R}^n$  uma variedade de dimensão  $m$ ,  $\mathbf{x} \in M$  e  $U \ni \mathbf{x}$  uma vizinhança aberta;  $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M \cap U$  diz-se uma *parametrização* de classe  $C^q$  de  $M \cap U$  se é uma bijecção de classe  $C^q$  com  $\mathbf{g}^{-1} : M \cap U \rightarrow V$  contínua e  $\text{rank } D\mathbf{g}(\mathbf{t}) = m$  para todo o  $\mathbf{t} \in V$ .
- $M \subset \mathbb{R}^n$  é uma variedade de dimensão  $m$  e classe  $C^q$  sse para todo o  $\mathbf{x} \in M$  existe uma vizinhança aberta  $U \ni \mathbf{x}$  e uma parametrização  $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M \cap U$  de classe  $C^q$ . Além disso, as colunas de  $D\mathbf{g}(\mathbf{t})$  formam uma base para  $T_{\mathbf{g}(\mathbf{t})}M$ .
- Se  $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M \cap U$  é uma parametrização, a função contínua  $\mathbf{g}^{-1} : M \cap U \rightarrow V$  diz-se uma *carta local*, e o seu domínio  $M \cap U$  a respectiva *vizinhança de coordenadas*.
- Sejam  $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M \cap U$  e  $\mathbf{h} : W \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M \cap O$  duas parametrizações tais que  $M \cap U \cap O \neq \emptyset$ , e  $\varphi : M \cap U \rightarrow V$  e  $\psi : M \cap O \rightarrow W$  as respectivas cartas locais. Então a mudança de carta local  $\psi \circ \mathbf{g} : \varphi(M \cap U \cap O) \rightarrow \psi(M \cap U \cap O)$  é de classe  $C^q$  e  $J(\psi \circ \mathbf{g})(\mathbf{t}) \neq 0$  para todo o  $\mathbf{t} \in \varphi(M \cap U \cap O)$ .
- Diz-se que uma variedade- $m$   $M \subset \mathbb{R}^n$  é *orientável* se existe  $\mu \in \Omega^m(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\mathbf{g}^*\mu(\mathbf{t}) \neq 0$  para todo o  $\mathbf{t} \in V$  e toda a parametrização  $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M \cap U$ . Diz-se então que:
  - $\mu$  induz uma *orientação* em  $M$ ;
  - $\mathbf{g}$  é *compatível* com a orientação induzida por  $\mu$  se  $\mathbf{g}^*\mu = f dt^1 \wedge \dots \wedge dt^m$  com  $f > 0$ ;
  - $\mu, \nu \in \Omega^m(\mathbb{R}^n)$  induzem a mesma orientação se são compatíveis com as mesmas parametrizações (portanto uma variedade orientável possui exactamente duas orientações).

6. Dado um vector

$$\mathbf{v} = v^1 \mathbf{e}_1 + \dots + v^n \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$$

definimos o covector-1

$$\omega_{\mathbf{v}} = v^1 dx^1 + \dots + v^n dx^n$$

e o covector- $(n-1)$

$$\Omega_{\mathbf{v}} = v^1 dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n - \dots + (-1)^{n-1} v^n dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}.$$

7. (i) Qualquer variedade-1  $M \subset \mathbb{R}^n$  é orientável: se  $\mathbf{t} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um vector tangente unitário contínuo,  $\omega_{\mathbf{t}}$  induz uma orientação em  $M$ . Uma parametrização  $\mathbf{g}$  é compatível com esta orientação sse

$$\mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{g}}{dt} > 0.$$

- (ii) Se  $M \subset \mathbb{R}^n$  é uma variedade- $(n-1)$  com vector normal unitário  $\mathbf{n} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínuo, então  $M$  é orientável, já que  $\Omega_{\mathbf{n}}$  induz uma orientação em  $M$ . Uma parametrização  $\mathbf{g}$  é compatível com esta orientação sse

$$\mathbf{n} \cdot (\partial_1 \mathbf{g} \times \dots \times \partial_{n-1} \mathbf{g}) > 0.$$

8. Seja  $M \subset \mathbb{R}^n$  uma variedade- $m$  orientável com a orientação induzida por  $\mu \in \Omega^m(\mathbb{R}^n)$ , e seja  $\omega \in \Omega^m(\mathbb{R}^n)$ . Seja  $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M \cap U$  uma parametrização, e  $f, h : V \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $\mathbf{g}^* \omega = f dt^1 \wedge \dots \wedge dt^m$ ,  $\mathbf{g}^* \mu = h dt^1 \wedge \dots \wedge dt^m$ . Se  $f$  é integrável em  $V$ , define-se

$$\int_{M \cap U} \omega = \text{sgn}(h) \int_V f dV_m(\mathbf{t}).$$

Definimos ainda

$$\int_{M \cap U} |\omega| = \int_V |f| dV_m(\mathbf{t}).$$

Se  $\mathcal{O}$  é uma cobertura aberta de  $M$  tal que  $M \cap U$  é uma vizinhança de coordenadas para todo o  $U \in \mathcal{O}$  e  $\Phi$  é uma partição da unidade subordinada a  $\mathcal{O}$ , e se a série

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_{M \cap U_\varphi} |\varphi \omega|$$

converge (onde  $U_\varphi$  designa um aberto tal que  $\text{supp } \varphi \subset U_\varphi$ ), definimos

$$\int_{M \cap U} \omega = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_{M \cap U_\varphi} \varphi \omega.$$

9. Se  $U \subset \mathbb{R}^n$  é aberto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável, então

$$\int_{U^+} f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \int_U f dV_n$$

onde  $+$  é a orientação induzida em  $U$  por  $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ . Por essa razão,  $dV_n = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  diz-se o *elemento de volume* em  $\mathbb{R}^n$ . Se  $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M \cap U$  é uma parametrização compatível com a orientação induzida em  $M \cap U$  por  $\mu \in \Omega^m(\mathbb{R}^n)$ , então

$$\int_{M \cap U} \omega = \int_{V^+} \mathbf{g}^* \omega.$$

10.  $dV_m \in \Omega^m(\mathbb{R}^n)$  diz-se um *elemento de volume* para a variedade- $m$   $M \subset \mathbb{R}^n$  se

$$|dV_m(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)| = V_m(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m) = \det(g_{ij})$$

para quaisquer  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in T_{\mathbf{x}}M$  e  $\mathbf{x} \in M$ , onde  $g$  é a matriz  $m \times m$  dada por  $g_{ij} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$ .

11. Qualquer variedade- $m$  orientável  $M \subset \mathbb{R}^n$  possui um elemento de volume  $dV_m \in \Omega^m(\mathbb{R}^n)$ , e este induz uma orientação em  $M$ . Se  $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M \cap U$  é uma parametrização compatível com a orientação induzida por  $dV_m$ , então

$$\mathbf{g}^* dV_m = \sqrt{\det(g_{ij})} dt^1 \wedge \dots \wedge dt^m = \sqrt{\det(D\mathbf{g}^t D\mathbf{g})} dt^1 \wedge \dots \wedge dt^m$$

onde a matriz  $m \times m$   $g$  é dada por

$$g_{ij} = \partial_i \mathbf{g} \cdot \partial_j \mathbf{g}.$$

12. (i) Se  $M$  é uma variedade-1 e  $\mathbf{g}$  é uma parametrização compatível com o elemento de volume  $dV_1$ , então

$$\mathbf{g}^* dV_1 = \left\| \frac{d\mathbf{g}}{dt} \right\| dt.$$

- (ii) Se  $M$  é uma variedade- $(n-1)$  orientável e  $\mathbf{g}$  é uma parametrização compatível com o elemento de volume  $dV_{n-1}$ , então

$$\mathbf{g}^* dV_{n-1} = \|\partial_1 \mathbf{g} \times \dots \times \partial_{n-1} \mathbf{g}\| dt^1 \wedge \dots \wedge dt^{n-1}.$$

13. Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é um campo escalar e  $M \subset \mathbb{R}^n$  é uma variedade- $m$  orientável, define-se

$$\int_M f = \int_{M^+} f dV_m,$$

onde  $+$  é a orientação induzida em  $M$  por  $dV_m$ .

14. Se  $M \subset \mathbb{R}^n$  é uma variedade de dimensão  $m$  orientável e é dada uma *função densidade de massa por unidade de volume  $m$ -dimensional*  $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty[$ , define-se:

- i. O *volume*  $m$ -dimensional de  $M$ :

$$V = V_m(M) = \int_M dV_m.$$

- ii. A *massa* de  $M$ :

$$M = \int_M \sigma dV_m.$$

- iii. A coordenada  $k$  do *centro de massa* de  $M$ :

$$x_{CM}^k = \frac{1}{M} \int_M x^k \sigma dV_m.$$

- iv. A coordenada  $k$  do *centróide* de  $M$ :

$$x_C^k = \frac{1}{V} \int_M x^k dV_m.$$

- v. O *momento de inércia* de  $M$  em relação a um determinado eixo:

$$I = \int_M d^2 \sigma dV_m,$$

onde  $d(\mathbf{x})$  é a distância do ponto  $\mathbf{x}$  ao eixo.

15. Se  $M \subset \mathbb{R}^n$  é uma variedade-1,  $\mathbf{g} : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma parametrização e  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vectorial  $C^\infty$ ,

$$\int_{M^+} \omega_{\mathbf{F}} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{g}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{g}}{dt}(t) dt = \int_M \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} dV_1,$$

onde  $+$  é a orientação de  $M$  compatível com  $\mathbf{g}$  e

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \frac{\frac{d\mathbf{g}}{dt}(t)}{\left\| \frac{d\mathbf{g}}{dt}(t) \right\|}$$

é o vector tangente unitário correspondente a esta orientação. Este integral diz-se o *integral de linha* de  $\mathbf{F}$  ao longo de  $M$  na direcção determinada por  $\boldsymbol{\tau}$ ; no caso em que  $\mathbf{F}$  é uma força, tem a interpretação física do trabalho realizado por  $\mathbf{F}$  sobre uma partícula que percorre  $M$  nesta direcção.

16. Se  $M \subset \mathbb{R}^n$  é uma variedade- $(n-1)$  (*hipersuperfície*) orientável,  $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma parametrização e  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vectorial  $C^\infty$ ,

$$\int_{M^+} \Omega_{\mathbf{F}} = \int_V \mathbf{F} \cdot (\partial_1 \mathbf{g} \times \dots \times \partial_{n-1} \mathbf{g}) dt^1 \dots dt^{n-1} = \int_M \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dV_{n-1},$$

onde  $+$  é a orientação de  $M$  compatível com  $\mathbf{g}$  e

$$\mathbf{n} = \frac{\partial_1 \mathbf{g} \times \dots \times \partial_{n-1} \mathbf{g}}{\|\partial_1 \mathbf{g} \times \dots \times \partial_{n-1} \mathbf{g}\|}$$

é o vector normal unitário correspondente a esta orientação. Este integral diz-se o *fluxo* de  $\mathbf{F}$  através de  $M$  na direcção determinada por  $\mathbf{n}$ ; no caso em que  $\mathbf{F} = \rho \mathbf{v}$ , onde  $\rho$  e  $\mathbf{v}$  são a densidade e velocidade de um fluido, tem a interpretação física da massa de fluido que atravessa  $M$  por unidade de tempo nesta direcção.

17.  $M \subset \mathbb{R}^n$  diz-se uma *variedade com bordo* de dimensão  $m$  (e classe  $C^q$ ) se  $M = \dot{M} \cup \partial M$ , onde  $\dot{M}$  é uma variedade de dimensão  $m$  (e classe  $C^q$ ),  $\partial M$  é uma variedade de dimensão  $m-1$  (e classe  $C^q$ ), dita o *bordo* de  $M$ , e para todo o  $\mathbf{x} \in \partial M$  existe um aberto  $U \ni \mathbf{x}$  e uma aplicação contínua com inversa contínua  $\mathbf{g} : V \cap \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m : t^1 \leq 0\} \rightarrow M \cap U$  cuja restrição a  $V \cap \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m : t^1 < 0\}$  é uma parametrização de  $\dot{M} \cap U$  e cuja restrição a  $V \cap \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m : t^1 = 0\}$  é uma parametrização de  $\partial M \cap U$ .  $M$  diz-se *orientável* se  $\dot{M}$  é orientável, e se  $\omega \in \Omega^m(\mathbb{R}^n)$  define-se

$$\int_{M^\mu} \omega = \int_{\dot{M}^\mu} \omega$$

(para uma dada orientação determinada por  $\mu \in \Omega^m(\mathbb{R}^n)$ ). Se  $M$  é orientável,  $\partial M$  é sempre orientável: se  $\mathbf{g} : V \cap \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m : t^1 \leq 0\} \rightarrow M \cap U$  é compatível com  $\mu$ ,  $\mathbf{h} : W \subset \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \partial M \cap U$  dada por  $\mathbf{h}(u^1, \dots, u^{m-1}) = \mathbf{g}(0, u^1, \dots, u^{m-1})$  é compatível com a *orientação induzida* por  $\mu$  em  $\partial M$ .

18. *Teorema de Stokes (Teorema Fundamental do Cálculo)*: Se  $M \subset \mathbb{R}^n$  é uma variedade com bordo compacta orientável de dimensão  $m$  e  $\omega \in \Omega^{m-1}(\mathbb{R}^n)$  então

$$\int_{M^\mu} d\omega = \oint_{\partial M^\nu} \omega,$$

onde  $\nu$  é a orientação induzida em  $\partial M$  pela orientação  $\mu$  de  $M$ .

19. Se  $M$  é uma variedade (sem bordo) compacta orientável de dimensão  $m$  e  $\omega \in \Omega^{m-1}(\mathbb{R}^n)$  então

$$\oint_M d\omega = 0$$

( $\oint$  significa apenas que a região de integração é uma variedade compacta).

20. Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é um campo escalar de classe  $C^1$ , tem-se

$$df = \omega_{\nabla f}.$$

21. *Notação*: Se  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um campo vectorial e  $M$  é uma variedade de dimensão 1 com parametrização  $\mathbf{g} : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  (compatível com a orientação  $+$  de  $M$ ), é habitual escrever

$$\int_M \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} = \int_{M^+} \omega_{\mathbf{F}} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{g}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{g}}{dt}(t) dt.$$

22. *Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha:* Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é um campo escalar de classe  $C^1$  e  $M$  é uma variedade de dimensão 1 com bordo parametrizada por  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $g(a) = \mathbf{a}$  e  $g(b) = \mathbf{b}$ , então

$$\int_M \nabla f \cdot d\mathbf{g} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}).$$

23. Se  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um campo vectorial de classe  $C^1$ , a sua *divergência* é o campo escalar contínuo

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F^1}{\partial x^1} + \dots + \frac{\partial F^n}{\partial x^n}.$$

Tem-se

$$d\Omega_{\mathbf{F}} = (\nabla \cdot \mathbf{F})dV_n.$$

24. *Teorema da Divergência:* Se  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um campo vectorial de classe  $C^1$  e  $M$  é uma variedade com bordo de dimensão  $n$  então

$$\int_M \nabla \cdot \mathbf{F} dV_n = \oint_{\partial M} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dV_{n-1},$$

onde  $\mathbf{n}$  é a normal unitária *exterior*.

25. *Teorema de Green:* É apenas o Teorema de Stokes para variedades-2 com bordo  $M \subset \mathbb{R}^2$ :

$$\int_{\partial M^\nu} Pdx + Qdy = \int_M \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy,$$

onde  $\nu$  corresponde a percorrer  $\partial M$  mantendo  $M$  à esquerda do vector tangente.

## 7. Cálculo Vectorial em $\mathbb{R}^3$

1. Se  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é um campo vectorial de classe  $C^1$ , o seu *rotacional* é o campo vectorial

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F^1 & F^2 & F^3 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial F^3}{\partial y} - \frac{\partial F^2}{\partial z}, \frac{\partial F^1}{\partial z} - \frac{\partial F^3}{\partial x}, \frac{\partial F^2}{\partial x} - \frac{\partial F^1}{\partial y} \right).$$

2. *Teorema de Stokes para Campos Vectoriais:* Se  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é um campo vectorial de classe  $C^1$  e  $M$  é uma superfície com bordo, então

$$\int_M (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dV_2 = \oint_{\partial M} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g},$$

onde  $\partial M$  deve ser percorrido no sentido tal que o produto externo do vector tangente ao bordo pela normal unitária  $\mathbf{n}$  aponte *para fora* da superfície.

3. *Regra da Mão Direita:* Uma maneira simples de recordar a relação entre as orientações da superfície e do seu bordo no Teorema de Stokes é a seguinte: desenhando um pequeno quadrado na superfície tal que um dos seus lados é um pedaço do bordo, a orientação correcta do bordo é a que induz a circulação ao longo dos lados do quadrado que fornece a normal unitária  $\mathbf{n}$  por aplicação da regra da mão direita (fechando a mão direita no sentido da circulação no quadrado, o polegar aponta na direcção da normal).

4. Se  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é um campo escalar de classe  $C^2$ , então

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}.$$

5. Se  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é um campo vectorial de classe  $C^2$ , então

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0.$$

6. *Lema de Poincaré para Campos Vectoriais:* Se  $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é um campo vectorial de classe  $C^1$  e  $U$  é um conjunto em estrela então:

- (i)  $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{F} = \nabla f$  para algum campo escalar  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  (dito um *potencial escalar* para  $\mathbf{F}$ );
- (ii)  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \Rightarrow \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$  para algum campo vectorial  $\mathbf{A} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  (dito um *potencial vector* para  $\mathbf{F}$ ).

7. *Dicionário Formas/Campos em  $\mathbb{R}^3$ :*

(i) Produtos:

$$\begin{aligned}\omega_{f\mathbf{F}} &= f\omega_{\mathbf{F}}; \\ \Omega_{\mathbf{F} \times \mathbf{G}} &= \omega_{\mathbf{F}} \wedge \omega_{\mathbf{G}}; \\ (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})dV_3 &= \Omega_{\mathbf{F}} \wedge \omega_{\mathbf{G}} = \omega_{\mathbf{F}} \wedge \Omega_{\mathbf{G}}.\end{aligned}$$

(ii) Derivadas:

$$\begin{aligned}\omega_{\nabla f} &= df; \\ \Omega_{\nabla \times \mathbf{F}} &= d\omega_{\mathbf{F}}; \\ (\nabla \cdot \mathbf{F})dV_3 &= d\Omega_{\mathbf{F}}.\end{aligned}$$

(iii) Integrais:

$$\begin{aligned}\int_M \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} &= \int_M \omega_{\mathbf{F}}; \\ \int_M \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dV_2 &= \int_M \Omega_{\mathbf{F}};\end{aligned}$$

(iv) Teoremas Sobre Derivadas de Produtos:

$$\begin{aligned}d(fg) &= fdg + gdf \Leftrightarrow \nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f; \\ d(f\omega_{\mathbf{F}}) &= df \wedge \omega_{\mathbf{F}} + f d\omega_{\mathbf{F}} \Leftrightarrow \nabla \times (f\mathbf{F}) = (\nabla f) \times \mathbf{F} + f(\nabla \times \mathbf{F}); \\ d(\omega_{\mathbf{F}} \wedge \omega_{\mathbf{G}}) &= d\omega_{\mathbf{F}} \wedge \omega_{\mathbf{G}} - \omega_{\mathbf{F}} \wedge d\omega_{\mathbf{G}} \Leftrightarrow \nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}).\end{aligned}$$

(v) Teoremas Sobre Derivadas:

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla f) &= \mathbf{0} \Leftrightarrow d(df) = 0; \\ \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) &= 0 \Leftrightarrow d(d\omega_{\mathbf{F}}) = 0.\end{aligned}$$



(vi) Teoremas Sobre Integrais:

$$\begin{aligned} \int_M (\nabla f) \cdot d\mathbf{g} &= f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) \Leftrightarrow \int_M df = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}); \\ \iint_M (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dV_2 &= \oint_{\partial M} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} \Leftrightarrow \int_M d\omega_{\mathbf{F}} = \oint_{\partial M} \omega_{\mathbf{F}}; \\ \iiint_M (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV_3 &= \oiint_{\partial M} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dV_2 \Leftrightarrow \int_M d\Omega_{\mathbf{F}} = \oint_{\partial M} \Omega_{\mathbf{F}}. \end{aligned}$$

8. Se  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  são abertos e  $\mathbf{g} : V \rightarrow U$  é uma mudança de coordenadas,

$$(x^1, \dots, x^n) = \mathbf{g}(t^1, \dots, t^n) \Leftrightarrow (t^1, \dots, t^n) = \mathbf{g}^{-1}(x^1, \dots, x^n),$$

vê-se que  $(t^1, \dots, t^n)$  podem ser vistas como funções definidas em  $U$ . Tem-se

- (i)  $\{\partial_1 \mathbf{g}, \dots, \partial_n \mathbf{g}\}$  é uma base para  $\mathbb{R}^n$ ;
- (ii)  $dt^i (\partial_j \mathbf{g}) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$ ;
- (iii)  $\{dt^1, \dots, dt^n\}$  é uma base para  $(\mathbb{R}^n)^*$ , dita a *base dual* de  $\{\partial_1 \mathbf{g}, \dots, \partial_n \mathbf{g}\}$ ;
- (iv)  $\omega_{\partial_i \mathbf{g}} = \sum_{j=1}^n g_{ij} dt^j$ , onde  $g_{ij} = \partial_i \mathbf{g} \cdot \partial_j \mathbf{g}$ .

9. *Coordenadas Cilíndricas em  $\mathbb{R}^3$* : Tem-se

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e portanto  $\{\partial_r \mathbf{g}, \partial_\theta \mathbf{g}, \partial_z \mathbf{g}\}$  é uma base ortogonal correspondendo às formas  $\{dr, r^2 d\theta, dz\}$ . A respectiva base ortonormal satisfaz

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \partial_r \mathbf{g} \sim dr \sim \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_z \sim r d\theta \wedge dz; \\ \mathbf{e}_\theta &= \frac{1}{r} \partial_\theta \mathbf{g} \sim r d\theta \sim \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r \sim dz \wedge dr; \\ \mathbf{e}_z &= \partial_z \mathbf{g} \sim dz \sim \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta \sim r dr \wedge d\theta \end{aligned}$$

(onde escrevemos  $\mathbf{F} \sim \omega_{\mathbf{F}} \sim \Omega_{\mathbf{F}}$ ). Tem-se ainda

$$dV_3 = r dr \wedge d\theta \wedge dz.$$

10. *Coordenadas Esféricas em  $\mathbb{R}^3$* : Tem-se

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

e portanto  $\{\partial_r \mathbf{g}, \partial_\theta \mathbf{g}, \partial_\varphi \mathbf{g}\}$  é uma base ortogonal correspondendo às formas  $\{dr, r^2 d\theta, r^2 \sin^2 \theta d\varphi\}$ . A respectiva base ortonormal satisfaz

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \partial_r \mathbf{g} \sim dr \sim \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\varphi \sim r^2 \sin \theta d\theta \wedge d\varphi; \\ \mathbf{e}_\theta &= \frac{1}{r} \partial_\theta \mathbf{g} \sim r d\theta \sim \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_r \sim r \sin \theta d\varphi \wedge dr; \\ \mathbf{e}_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi \mathbf{g} \sim r \sin \theta d\varphi \sim \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta \sim r dr \wedge d\theta. \end{aligned}$$

Tem-se ainda

$$dV_3 = r^2 \sin \theta dr \wedge d\theta \wedge d\varphi.$$

## 8. Homotopia

1. Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  aberto. Um campo vectorial  $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  diz-se um *campo gradiente* (ou *conservativo*) se existe uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  (dita um *potencial* para  $\mathbf{F}$ ) tal que  $\mathbf{F} = \nabla f$ . Diz-se que o campo  $\mathbf{F}$  é *fechado* se  $\omega_{\mathbf{F}}$  é fechada (portanto  $\mathbf{F}$  gradiente  $\Rightarrow \mathbf{F}$  fechado).
2. Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  um aberto conexo por arcos e  $\omega \in \Omega^1(D)$ . Então  $\omega$  é exacta sse

$$\oint_C \omega = 0$$

para toda a variedade-1 compacta (i.e., curva fechada)  $C \subset D$ .

3. Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto não vazio. Diz-se que dois caminhos fechados  $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow D$  são *caminhos (livremente) homotópicos* em  $D$  se existe uma função contínua  $\mathbf{H} : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow D$  (dita uma *homotopia*) tal que  $\mathbf{H}(s, 0) = \alpha(s)$  e  $\mathbf{H}(s, 1) = \beta(s)$  para todo  $s \in [a, b]$  e  $\mathbf{H}(a, t) = \mathbf{H}(b, t)$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Quando a homotopia é de classe  $C^q$  os caminhos dizem-se  *$C^q$ -homotópicos*.
4. Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  um aberto conexo por arcos,  $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow D$  caminhos  $C^1$ -homotópicos e  $\omega \in \Omega^1(D)$  uma forma fechada. Então

$$\int_{\alpha([a, b])} \omega = \int_{\beta([a, b])} \omega.$$

5. Diz-se que  $D \subset \mathbb{R}^n$  é *simplesmente conexo* se  $D$  é conexo por arcos e qualquer caminho fechado  $\alpha : [a, b] \rightarrow D$  é homotópico em  $D$  a um caminho constante.
6. Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  um aberto simplesmente conexo e  $\omega \in \Omega^1(D)$ . Então  $\omega$  é exacta sse  $\omega$  é fechada.
7. Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  um aberto conexo por arcos e  $\omega \in \Omega^m(D)$ . Então  $\omega$  é exacta sse

$$\int_M \omega = 0$$

para toda a variedade- $m$  compacta  $M \subset D$ .

8. Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  um aberto conexo por arcos tal que toda a variedade- $m$  compacta  $M \subset D$  é o bordo de uma variedade- $(m+1)$  com bordo compacta  $N \subset D$ . Então  $\omega \in \Omega^m(D)$  é exacta sse  $\omega$  é fechada.

## 9. Integral de Lebesgue

1. Uma álgebra de conjuntos  $\mathcal{A}$  em  $X \subset \mathbb{R}^n$  diz-se uma  $\sigma$ -álgebra se

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A}.$$

2. A *medida exterior* de  $A \subset \mathbb{R}^n$  é

$$\bar{V}_n(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} V_n(I_k) : I_k \text{ intervalo, } A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k \right\}$$

(pode ser  $+\infty$ ). Note-se que  $\bar{V}_n(A) = 0$  sse  $A$  tem medida nula.

3. A *diferença simétrica* entre dois conjuntos  $A$  e  $B$  é

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

4. Um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  diz-se *mensurável com medida finita* se para todo o  $\varepsilon > 0$  existem intervalos limitados  $I_1, \dots, I_N$  tais que

$$\bar{V}_n \left( A \Delta \bigcup_{k=1}^N I_k \right) < \varepsilon.$$

Diz-se que  $A \subset \mathbb{R}^n$  é *mensurável* (à Lebesgue) se  $A \cap [-L, L]^n$  é mensurável com medida finita para todo o  $L > 0$ . A família dos subconjuntos mensuráveis de  $\mathbb{R}^n$  designa-se por  $\mathcal{M}$ . A função  $V_n : \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$  definida por  $V_n(A) = \bar{V}_n(A)$  diz-se a *medida de Lebesgue*.

5. (i)  $\mathcal{M}$  é uma  $\sigma$ -álgebra;  
(ii)  $V_n : \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$  é  $\sigma$ -aditiva, i.e., se  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$  e  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para  $i \neq j$  então

$$V_n \left( \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} V_n(A_k);$$

(iii)  $A$  tem medida nula  $\Rightarrow A \in \mathcal{M}$ ;

(iv)  $A$  aberto  $\Rightarrow A \in \mathcal{M}$  (logo  $A$  fechado  $\Rightarrow A \in \mathcal{M}$ ).

6. Uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se *mensurável* se  $f^{-1}(I) \in \mathcal{M}$  para qualquer intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ .

7. (i)  $f$  contínua  $\Rightarrow f$  mensurável;  
(ii)  $f, g$  mensuráveis e  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  contínua  $\Rightarrow F \circ (f, g)$  mensurável (e.g.,  $f + g, fg$ );  
(iii)  $f_1, f_2, \dots$  mensuráveis tais que existe  $f(\mathbf{x}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(\mathbf{x}) \Rightarrow f$  mensurável.

8. A função  $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se *simples* se existem conjuntos disjuntos  $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^n$  e números reais  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  tais que

$$s = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{A_i}.$$

Se  $c_i \neq c_j$  para  $i \neq j$ , a função  $s$  é mensurável sse  $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{M}$ .

9. Se  $s : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty[$  é simples e mensurável,

$$s = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{A_i} \quad (c_i \in \mathbb{R}^+, A_i \in \mathcal{M}),$$

define-se o seu *integral* como sendo

$$\int_{\mathbb{R}^n} s dV_n = \sum_{i=1}^N c_i V(A_i)$$

(pode ser  $+\infty$ ).

10. Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty[$  é mensurável, define-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dV_n = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} s dV_n : 0 \leq s \leq f \text{ é simples e mensurável} \right\}$$

(pode ser  $+\infty$ ). Se

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dV_n < +\infty$$

a função  $f$  diz-se *integrável* (à Lebesgue).

11. Dada uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definem-se  $f^+, f^- : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  através de

$$f^+(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{se } f(\mathbf{x}) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases}, \quad f^-(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(\mathbf{x}) \geq 0 \\ -f(\mathbf{x}) & \text{se } f(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases}$$

Tem-se  $f^+, f^- \geq 0, f = f^+ - f^-, |f| = f^+ + f^-$ , e  $f$  é mensurável sse  $f^+, f^-$  são mensuráveis.

12. Uma função mensurável  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se *integrável* se  $f^+, f^-$  são integráveis. Nesse caso, define-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dV_n = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ dV_n - \int_{\mathbb{R}^n} f^- dV_n.$$

13. Se  $A \in \mathcal{M}$ ,  $f$  diz-se *integrável em  $A$*  se  $f \chi_A$  é integrável, caso em que se define

$$\int_A f dV_n = \int_{\mathbb{R}^n} f \chi_A dV_n.$$

O conjunto das funções integráveis em  $A$  designa-se por  $L^1(A)$ .

14. Seja  $A \in \mathcal{M}$ . Então

(i) Se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  é mensurável e limitada e  $V_n(A) < +\infty$  então  $f \in L^1(A)$ ;

(ii) Se  $f, g \in L^1(A)$  e  $f \leq g$  então

$$\int_A f dV_n \leq \int_A g dV_n.$$

(iii) Se  $V_n(A) = 0$  então  $\int_A f dV_n = 0$ .

(iv) Se  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $f, g \in L^1(A)$  então  $af + bg \in L^1(A)$  e

$$\int_A (af + bg) dV_n = a \int_A f dV_n + b \int_A g dV_n.$$

(v)  $f \in L^1(A)$  sse  $|f| \in L^1(A)$ , e

$$\left| \int_A f dV_n \right| \leq \int_A |f| dV_n.$$

15. Seja  $I$  um intervalo compacto. Se  $f : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável à Riemann então  $f \in L^1(I)$  e

$$\int_I f dV_n$$

é igual para ambas as definições.

16.  $\sigma$ -aditividade do integral: Sejam  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$  com  $A_i \cap A_j = \emptyset$  se  $i \neq j$ ,  $A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$  e  $f \geq 0$  mensurável. Então

$$\int_A f dV_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{A_k} f dV_n.$$

17. Sejam  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$  com  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ ,  $A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$  e  $f \geq 0$  mensurável. Então

$$\int_A f dV_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{A_k} f dV_n.$$

18.  $\frac{1}{x^\alpha} \in L^1([1, +\infty[)$  sse  $\alpha > 1$ .

19.  $e^{-x^2} \in L^1(\mathbb{R})$  e  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .

20.  $\frac{1}{x^\alpha} \in L^1(]0, 1])$  sse  $\alpha < 1$ .

21. Teorema da Convergência Monótona de Levi: Seja  $A \in \mathcal{M}$  e  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de funções mensuráveis em  $A$  tais que

$$0 \leq f_1(\mathbf{x}) \leq f_2(\mathbf{x}) \leq \dots$$

para todo o  $\mathbf{x} \in A$ . Se existe  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$$

para todo o  $\mathbf{x} \in A$  então

$$\int_A f dV_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_A f_k dV_n$$

(pode ser  $+\infty$ ).

22. *Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue:* Seja  $A \in \mathcal{M}$  e  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de funções mensuráveis em  $A$ . Se existe  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$$

para todo o  $\mathbf{x} \in A$  existe  $g \in L^1(A)$  tal que

$$|f_k(\mathbf{x})| \leq g(\mathbf{x})$$

para todo o  $\mathbf{x} \in A$  e  $k \in \mathbb{N}$  então  $f \in L^1(A)$  e

$$\int_A f dV_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_A f_k dV_n.$$

23. *Regra de Leibniz:* Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$  mensurável e  $f : A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(\mathbf{x}, y)$  é integrável em  $\mathbf{x}$  para todo o  $y \in \mathbb{R}$  e diferenciável em  $y$  para todo o  $\mathbf{x} \in A$ . Se existe  $g \in L^1(A)$  tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, y) \right| \leq g(\mathbf{x})$$

para  $\mathbf{x} \in A$  e  $y$  numa vizinhança de  $y_0 \in \mathbb{R}$  então a função  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$F(y) = \int_A f(\mathbf{x}, y) dV_n(\mathbf{x})$$

é diferenciável em  $y_0$  e

$$F'(y_0) = \int_A \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, y_0) dV_n(\mathbf{x}).$$