

Análise Matemática III - Turma Especial  
1º Teste - 7 de Novembro de 2002 - 9h

**Duração: 1 hora e 30 minutos.**

**Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.**

1. Considere o conjunto

$$M = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 = 1 \text{ e } z^2 + w^2 = 1\}$$

- (2 val.) (a) Prove que  $M$  é uma variedade e indique a respectiva dimensão.  
(2 val.) (b) Escreva as equações do plano tangente a  $M$  no ponto  $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0, 1)$ .  
(3 val.) (c) Calcule a distância de  $M$  ao ponto  $(1, 1, 1, 1)$ .

(3 val.) 2. Escreva uma expressão para o integral iterado

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz dy dx$$

usando coordenadas esféricas.

(3 val.) 3. Calcule o volume do seguinte conjunto mensurável à Jordan:

$$A = \{(x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^5 : x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 \leq 1\}.$$

(3 val.) 4. Mostre que a equação

$$\int_0^x e^{-yt^2} dt = 1$$

define  $y$  como função de  $x$  numa vizinhança do ponto  $(1, 0)$ . Designando esta função implícita por  $f$ , calcule  $f'(1)$ .

5. Seja  $\{q_n\}$  uma enumeração dos racionais do intervalo  $[0, 1]$  e considere o conjunto

$$U = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[ q_n - \frac{1}{10^n}, q_n + \frac{1}{10^n} \right]$$

- (3 val.) (a) Mostre que  $K = [0, 1] \setminus U$  é um conjunto compacto que não tem medida nula (em particular é não vazio).  
(1 val.) (b) Mostre que  $\partial K = K$ . Conclua que  $K$  não é mensurável à Jordan.