Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III - Turma Especial

2º Teste - 19 de Dezembro de 2002 - 10h

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

Só precisa de resolver três das quatro primeiras questões

1. Na resposta a esta questão não pode usar formas diferenciais. Seja S uma variedade-2 com bordo, compacta, em $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{aligned}&S \subset \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0\};\\ &\partial S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x^2+y^2 = 1\};\\ &\mathbf{n} = (x,y,0) \text{ em } \partial S,\end{aligned}$$

onde $\mathbf{n}$ designa uma normal unitária a S. Seja $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o campo vectorial definido por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x,-y,1).$$

Calcule $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2$:

(2 val.) (a) Usando o Teorema da Divergência.

(3 val.) (b) Sem usar o Teorema da Divergência.

2. Considere a variedade-2 compacta em $\mathbb{R}^4$

$$M = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x^2+y^2 = 1 \text{ e } z^2+w^2 = 1\right\}$$

e a forma-2

$$\omega = (-y dx + x dy) \wedge (-w dz + z dw).$$

Calcule $\oint_{M^\omega} \omega$:

(2 val.) (a) Directamente pela definição.

(3 val.) (b) Usando o Teorema de Stokes.

(5 val.) **3.** Sejam (r, θ, φ) as habituais coordenadas esféricas, definidas pela transformação de coordenadas $\mathbf{g} : \mathbb{R}^+ \times]0, \pi[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{g}(r, \theta, \varphi) = (r\text{sen}\theta \cos \varphi, r\text{sen}\theta\text{sen}\varphi, r \cos \theta).$$

Considere o campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\} \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$\mathbf{F}(\mathbf{g}(r, \theta, \varphi)) = F^r(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_r + F^\theta(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_\theta + F^\varphi(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_\varphi,$$

onde $\mathbf{e}_r \sim dr$, $\mathbf{e}_\theta \sim rd\theta$ e $\mathbf{e}_\varphi \sim r\text{sen}\theta d\varphi$ são os versores associados às coordenadas esféricas e as funções F^r, F^θ, F^φ são de classe C^∞. Escreva uma expressão para o rotacional de $\mathbf{F}$ na base $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}$ em função das funções F^r, F^θ, F^φ e das suas derivadas.

4. Considere as funções

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt; \qquad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2 + 1} dt; \qquad F(x) = f^2(x) + g(x).$$

(1 val.) (a) Mostre que F é constante.

(2 val.) (b) Mostre que $\lim_{x\to 0} F(x) = \frac{\pi}{4}$.

(1 val.) (c) Mostre que $\lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$.

(1 val.) (d) Conclua que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

5. Sejam

$$\overline{B}^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}, \quad S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

Recorde que definindo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^n$ mediante

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^n}$$

se tem

$$d\Omega_{\mathbf{F}} = 0, \qquad \int_{S^{n-1}} \Omega_{\mathbf{F}} = V_{n-1}\left(S^{n-1}\right).$$

(2 val.) (a) Mostre que não existe nenhuma aplicação de classe C^1 $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que seja a identidade quando restrita a S^{n-1} e tal que $\mathbf{g}\left(\overline{B}^n\right) \subset S^{n-1}$.

(3 val.) (b) Prove a seguinte versão do *Teorema do Ponto Fixo de Brower:* qualquer aplicação de classe C^1 $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{f}\left(\overline{B}^n\right) \subset \overline{B}^n$ tem pelo menos um ponto fixo em $\overline{B}^n$. (**Sugestão:** *Note que se existisse uma função* $\mathbf{f}$ *para a qual a conclusão do teorema não se verificasse então* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *e* $\mathbf{x}$ *definiriam uma semi-recta para todo o* $\mathbf{x} \in \overline{B}^n$).