Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III - Turma Especial

2º Teste - 19 de Dezembro de 2002 - 10h

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

Só precisa de resolver três das quatro primeiras questões

1. Na resposta a esta questão não pode usar formas diferenciais. Seja S uma variedade-2 com bordo, compacta, em $\mathbb{R}^3$ tal que

$$S \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0\};$$
$$\partial S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x^2 + y^2 = 1\};$$
$$\mathbf{n} = (x, y, 0) \text{ em } \partial S,$$

onde $\mathbf{n}$ designa uma normal unitária a S. Seja $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o campo vectorial definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, -y, 1).$$

Calcule $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dV_2$:

(2 val.) (a) Usando o Teorema da Divergência.

Resolução: Seja

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 1\}$$

e U o aberto cuja fronteira é $C \cup S$. Pelo Teorema da Divergência, observando que $\mathbf{n}$ é a normal exterior a U,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot (0, 0, -1) \, dV_2 + \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dV_2 = \int_U \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV_3.$$

Uma vez que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 1 - 1 + 0 = 0$, temos

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dV_2 = \int_C \mathbf{F} \cdot (0, 0, 1) \, dV_2 = \int_C 1 \, dV_2 = V_2(C) = \pi.$$

(3 val.) (b) Sem usar o Teorema da Divergência.

Resolução: Uma vez que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ e $\mathbf{F}$ se encontra definido em $\mathbb{R}^3$, que é em estrela, sabemos que $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$ para algum campo vectorial $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Como é sabido, o facto de $\mathbf{A}$ estar definido a menos de um gradiente permite-nos escolher $\mathbf{A}$ com uma das componentes (por exemplo A^1) nula. Temos então

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{F} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial A^3}{\partial y} - \dfrac{\partial A^2}{\partial z} = F^1 \\[2ex] \dfrac{\partial A^1}{\partial z} - \dfrac{\partial A^3}{\partial x} = F^2 \\[2ex] \dfrac{\partial A^2}{\partial x} - \dfrac{\partial A^1}{\partial y} = F^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial A^3}{\partial y} - \dfrac{\partial A^2}{\partial z} = x \\[2ex] -\dfrac{\partial A^3}{\partial x} = -y \\[2ex] \dfrac{\partial A^2}{\partial x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{\partial g}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial z} = x \\[2ex] A^3 = xy + g(y,z) \\[2ex] A^2 = x + f(y,z) \end{cases}$$

pelo que $\mathbf{A} = (0, x, xy)$ é um potencial vector para $\mathbf{F}$. Pelo Teorema de Stokes para campos vectoriais em $\mathbb{R}^3$,

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g},$$

onde ∂S deve ser percorrida no sentido directo no plano xOy de acordo com a regra da mão direita. Uma parametrização para ∂S compatível com esta orientação é $\mathbf{g} :]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{g}(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$. Concluimos que

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \int_0^{2\pi} (0, \cos\theta, \cos\theta \operatorname{sen}\theta) \cdot (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0) d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \pi.$$

2. Considere a variedade-2 compacta em $\mathbb{R}^4$

$$M = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 = 1 \text{ e } z^2 + w^2 = 1 \right\}$$

e a forma-2

$$\omega = (-ydx + xdy) \wedge (-wdz + zdw).$$

Calcule $\oint_{M^\omega} \omega$:

(2 val.) (a) Directamente pela definição.

Resolução: Uma parametrização para M (excepto um conjunto de medida nula) é $\mathbf{g} :]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^4$ dada por

$$\mathbf{g}(\theta, \varphi) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, \cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi).$$

Tem-se

$$\mathbf{g}^*(-ydx + xdy) = -\operatorname{sen}\theta d(\cos\theta) + \cos\theta d(\operatorname{sen}\theta) = \operatorname{sen}^2\theta d\theta + \cos^2\theta d\theta = d\theta$$

e analogamente

$$\mathbf{g}^*(-wdz + zdw) = d\varphi.$$

Concluimos que

$$\mathbf{g}^*\omega = d\theta \wedge d\varphi$$

e uma vez que $1 > 0$ vemos que em particular $\mathbf{g}$ é compatível com a orientação induzida por ω em M. Portanto

$$\oint_{M^\omega} \omega = \int_{]0,2\pi[\times]0,2\pi[^+} \mathbf{g}^*\omega = \int_{]0,2\pi[\times]0,2\pi[^+} d\theta \wedge d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 d\theta d\varphi = 4\pi^2.$$

(3 val.) (b) Usando o Teorema de Stokes.

Resolução: Devemos determinar uma variedade cujo bordo seja M. Um exemplo simples é

$$N = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } z^2 + w^2 = 1\right\}.$$

Pelo Teorema de Stokes,

$$\oint_{M^\omega} \omega = \oint_{\partial N^\omega} \omega = \int_{N^\nu} d\omega,$$

onde ν designa a orientação de N que induz o orientação determinada por ω em $M = \partial N$. Uma parametrização para N (excepto um conjunto de medida nula) é $\mathbf{h} :]0, 1[\times]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^4$ dada por

$$\mathbf{h}(r, \theta, \varphi) = (r\cos\theta, r\text{sen}\theta, \cos\varphi, \text{sen}\varphi).$$

Vimos já que $\mathbf{g}(\theta, \varphi) = \mathbf{h}(1, \theta, \varphi)$ é uma parametrização para $M = \partial N$ compatível com ω; como o domínio de $\mathbf{h}$ está contido no semi-espaço $r < 1$, e r é o primeiro parâmetro, concluimos que $\mathbf{h}$ é compatível com ν. Finalmente,

$$d\omega = 2dx \wedge dy \wedge (-wdz + zdw) + (-ydx + xdy) \wedge (2dz \wedge dw)$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}^*(dx \wedge dy) &= rdr \wedge d\theta; \\
\mathbf{h}^*(-wdz + zdw) &= d\varphi; \\
\mathbf{h}^*(dz \wedge dw) &= 0,
\end{aligned}$$

pelo que

$$\mathbf{h}^* d\omega = 2rdr \wedge d\theta \wedge d\varphi,$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\oint_{M^\omega} \omega = \int_{N^\nu} d\omega &= \int_{]0,1[\times]0,2\pi[\times]0,2\pi[^+} \mathbf{h}^* d\omega = \int_{]0,1[\times]0,2\pi[\times]0,2\pi[^+} 2rdr \wedge d\theta \wedge d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 2rdrd\theta d\varphi = 4\pi^2.
\end{aligned}$$

(5 val.) **3.** Sejam (r, θ, φ) as habituais coordenadas esféricas, definidas pela transformação de coordenadas $\mathbf{g} : \mathbb{R}^+\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{g}(r, \theta, \varphi) = (r\text{sen}\theta\cos\varphi, r\text{sen}\theta\text{sen}\varphi, r\cos\theta).$$

Considere o campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\} \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$\mathbf{F}(\mathbf{g}(r, \theta, \varphi)) = F^r(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_r + F^\theta(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_\theta + F^\varphi(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_\varphi,$$

onde $\mathbf{e}_r \sim dr$, $\mathbf{e}_\theta \sim rd\theta$ e $\mathbf{e}_\varphi \sim r\text{sen}\theta d\varphi$ são os versores associados às coordenadas esféricas e as funções F^r, F^θ, F^φ são de classe C^∞. Escreva uma expressão para o rotacional de $\mathbf{F}$ na base $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}$ em função das funções F^r, F^θ, F^φ e das suas derivadas.

Resolução:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{F} &\sim d\left(F^r dr + F^\theta r d\theta + F^\varphi r\text{sen}\theta d\varphi\right) \\
&\sim [\partial_r(rF^\theta) - \partial_\theta F^r] dr \wedge d\theta + [\partial_\theta(r\text{sen}\theta F^\varphi) - \partial_\varphi(rF^\theta)] d\theta \wedge d\varphi \\
&\qquad + [\partial_\varphi F^r - \partial_r(r\text{sen}\theta F^\varphi)] d\varphi \wedge dr \\
&\sim \frac{1}{r^2\text{sen}\theta}[\partial_\theta(r\text{sen}\theta F^\varphi) - \partial_\varphi(rF^\theta)]\mathbf{e}_r + \frac{1}{r\text{sen}\theta}[\partial_\varphi F^r - \partial_r(r\text{sen}\theta F^\varphi)]\mathbf{e}_\theta \\
&\qquad + \frac{1}{r}[\partial_r(rF^\theta) - \partial_\theta F^r]\mathbf{e}_\varphi.
\end{aligned}$$

4. Considere as funções

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt; \qquad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt; \qquad F(x) = f^2(x) + g(x).$$

(1 val.) (a) Mostre que F é constante.

Resolução: Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo e a Regra de Leibniz, temos

$$\begin{aligned}
F'(x) &= 2f(x)f'(x) + g'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2} dt + \int_0^1 \frac{-2x(t^2+1)e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt \\
&= 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2} dt - 2e^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2} x dt = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2} dt - 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2} du = 0
\end{aligned}$$

onde fizémos a mudança de variável $u = xt$ no segundo integral.

(2 val.) (b) Mostre que $\lim_{x\to 0} F(x) = \frac{\pi}{4}$.

Resolução: A função integranda em $g(x)$ é majorada pela função constante igual a 1, que é integrável em $[0, 1]$. Podemos portanto aplicar o Teorema da Convergência Dominada para concluir que

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \int_0^1 \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt = \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt = [\operatorname{arctg} x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Uma vez que o integral indefinido de uma função integrável é uma função contínua, a função f é contínua e portanto $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$. Logo $\lim_{x\to 0} F(x) = 0^2 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

(1 val.) (c) Mostre que $\lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$.

Resolução: Podemos novamente aplicar o Teorema da Convergência Dominada em $g(x)$ para concluir que

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \int_0^1 \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt = \int_0^1 0 dt = 0.$$

(1 val.) (d) Conclua que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Resolução: Uma vez que F é constante e $\lim_{x\to 0} F(x) = \frac{\pi}{4}$, vemos que $F(x) = \frac{\pi}{4}$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Logo

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} f^2(x) + g(x) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x)\right)^2 + 0.$$

Como a integranda em $f(x)$ não muda de sinal, temos

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Portanto,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

5. Sejam

$$\overline{B}^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}, \quad S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

Recorde que definindo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^n$ mediante

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^n}$$

se tem

$$d\Omega_{\mathbf{F}} = 0, \qquad \int_{S^{n-1}} \Omega_{\mathbf{F}} = V_{n-1}\left(S^{n-1}\right).$$

(2 val.) (a) Mostre que não existe nenhuma aplicação de classe C^1 $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que seja a identidade quando restrita a S^{n-1} e tal que $\mathbf{g}\left(\overline{B}^n\right) \subset S^{n-1}$.

Resolução: Se existisse uma tal aplicação, teríamos

$$V_{n-1}\left(S^{n-1}\right) = \int_{S^{n-1}} \Omega_{\mathbf{F}} = \int_{S^{n-1}} \mathbf{g}^*\Omega_{\mathbf{F}} = \int_{\overline{B}^n} d\mathbf{g}^*\Omega_{\mathbf{F}} = \int_{\overline{B}^n} \mathbf{g}^* d\Omega_{\mathbf{F}} = 0$$

(onde usámos o facto de $\mathbf{g}$ ser a identidade em S^{n-1} na segunda igualdade, o Teorema de Stokes na terceira e o facto de $\Omega_{\mathbf{F}}$ ser fechada na quinta).

(3 val.) (b) Prove a seguinte versão do *Teorema do Ponto Fixo de Brower:* qualquer aplicação de classe C^1 $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{f}\left(\overline{B}^n\right) \subset \overline{B}^n$ tem pelo menos um ponto fixo em $\overline{B}^n$. (**Sugestão:** *Note que se existisse uma função* $\mathbf{f}$ *para a qual a conclusão do teorema não se verificasse então* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *e* $\mathbf{x}$ *definiriam uma semi-recta para todo o* $\mathbf{x} \in \overline{B}^n$).

Resolução: Seguindo a sugestão, suponhamos que a aplicação de classe C^1 $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo $\mathbf{f}\left(\overline{B}^n\right) \subset \overline{B}^n$ não possuía qualquer ponto fixo em $\overline{B}^n$. Nesse caso os pontos $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{x}$ definiriam uma semi-recta para todo o $\mathbf{x} \in \overline{B}^n$, que intersectaria S^{n-1} num determinado ponto $\mathbf{g}(\mathbf{x})$. Ter-se-ia

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{f}(\mathbf{x}))$$

com $\lambda = \lambda(\mathbf{x}) > 0$ solução de

$$\langle \mathbf{g}(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x}) \rangle = 1 \Leftrightarrow \langle \mathbf{x} - \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle \lambda^2 + 2 \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle \lambda + \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle = 1$$

O produto das raízes da equação acima é

$$\frac{\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle - 1}{\langle \mathbf{x} - \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle} \leq 0$$

(porque $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \overline{B}^n$). Concluímos que uma das raízes é ≤ 0, pelo que λ seria a raíz correspondente ao sinal $+$ na fórmula resolvente, claramente uma função de classe C^1 de $\mathbf{x}$. Logo $\mathbf{g}$ seria uma aplicação de classe C^1 que seria a identidade quando restrita a S^{n-1} e tal que $\mathbf{g}\left(\overline{B}^n\right) \subset S^{n-1}$, em contradição com o que foi provado na alínea anterior. Concluímos que $\mathbf{f}$ deve ter pelo menos um ponto fixo.