Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha 10

A entregar até à aula prática de sexta-feira dia 28 de Novembro

1. Prove o *Segundo Teorema de Pappus:* se $C \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ é uma variedade-1 de comprimento finito, a superfície de revolução S gerada por C identificando $\mathbb{R}^2$ com o plano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ e rodando este plano em torno do eixo dos yy satisfaz

$$V_2(S) = 2\pi\overline{x}V_1(C),$$

onde $\overline{x}$ é a coordenada x do centróide de A. Qual é a fórmula da área do toro?

2. Calcule a área, o centróide e o momento de inércia em relação ao eixo dos zz (em função da massa total M) das superfícies homogéneas seguintes:

   (a) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2 \text{ e } z \in [0, h]\right\}$, com $r, h > 0$;

   (b) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : rz = h\left(r - \sqrt{x^2 + y^2}\right) \text{ e } z \in [0, h]\right\}$, com $r, h > 0$;

   (c) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\right\}$, com $r > 0$.

3. Considere o campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$$

   (a) Calcule o integral de linha de $\mathbf{F}$ ao longo da curva

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \cos\theta, y = \operatorname{sen}\theta, z = 2\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

   percorrida no sentido dos valores de z decrescentes sem usar o Teorema de Stokes.

   (b) Confirme o resultado da alínea anterior usando o Teorema de Stokes para variedades-1 com bordo.

   (c) Calcule o fluxo de $\mathbf{F}$ através da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \leq 1\}$$

   no sentido dos valores de z crescentes sem usar o Teorema de Stokes.

   (d) Confirme o resultado da alínea anterior usando o Teorema de Stokes para variedades-2 com bordo.

   (e) Confirme os resultados das duas alíneas anteriores usando o Teorema da Divergência (i.e., o Teorema de Stokes para variedades-3 com bordo).

Não precisam de entregar:

4. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade de dimensão 1 conexa (portanto conexa por arcos). Mostre que existe uma aplicação $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to M$ de classe C^1, sobrejectiva, tal que $\|\mathbf{g}'\| = 1$. Conclua que existe um campo tangente unitário contínuo $\mathbf{t} : M \to \mathbb{R}^n$.

5. Considere a variedade-2

$$S^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\right\}.$$

(a) Mostre que a parametrização $\mathbf{g} :]0,2\pi[\times]-1,1[\to \mathbb{R}^3$ que usa as coordenadas cilíndricas (θ, z) como parâmetros satisfaz

$$\mathbf{g}^* dV_2 = d\theta \wedge dz.$$

Isto significa que esta parametrização preserva áreas. A carta local associada a esta parametrização chama-se a *projecção cilíndrica*, e é frequentemente utilizada em cartografia.

(b) A carta local mais usual em cartografia é a chamada *projecção de Mercator*, que corresponde a utilizar como parâmetros as funções (u, φ), onde (θ, φ) são as habituais coordenadas esféricas, correspondentes à parametrização $\mathbf{g} :]0,\pi[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{g}(\theta,\varphi) = (\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \cos\theta)$$

e

$$u(\theta) = \log|\operatorname{cosec}\theta + \operatorname{cotg}\theta| = \log\left|\operatorname{cotg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|.$$

Mostre que

$$\begin{pmatrix} g_{uu} & g_{u\varphi} \\ g_{\varphi u} & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2\theta & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}^2\theta \end{pmatrix}.$$

Conclua que a projecção de Mercator preserva ângulos entre duas curvas (definidos como os ângulos entre os respectivos vectores tangentes).

(c) Note que a projecção de Mercator associa as meridianos curvas de φ constante e aos paralelos curvas de u constante. Portanto uma linha recta na carta de Mercator corresponde a uma curva de rumo constante, dita uma *linha de rumo*, ou *curva loxodrómica* (descoberta por Pedro Nunes). Obtenha a expressão destas curvas em coordenadas locais (θ, φ), e analise o seu comportamento na vizinhança dos pólos.

6. Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ abertos, $M \subset U$ uma variedade-m orientável e $\omega \in \Omega^m(V)$. Seja $\mathbf{g} : U \to V$ um *difeomorfismo* (i.e., uma aplicação bijectiva, diferenciável, com inversa diferenciável) de classe C^∞. Mostre que $\mathbf{g}(M)$ é uma variedade-m orientável e que

$$\int_{\mathbf{g}(M)^\mu} \omega = \int_{M^{\mathbf{g}^*\mu}} \mathbf{g}^*\omega.$$

Mostre que no entanto não é em geral verdade que

$$\int_{\mathbf{g}(M)} f dV_m = \int_M (f \circ \mathbf{g}) dV_m.$$

Que condição sobre $\mathbf{g}$ garantiria a veracidade desta última fórmula?