

Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha 13

Não precisam de entregar esta ficha

1. Dê um exemplo de uma sucessão de funções $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$

para todo o $x \in [0, 1]$ mas

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1.$$

Verifique que as hipóteses do Teorema da Convergência Monótona/Dominada não são satisfeitas.

2. Usando

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

e a Regra de Leibnitz calcule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

3. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ contínua q.t.p. em A e limitada em cada compacto contido em A . Seja \mathcal{O} uma cobertura admissível de A e Φ uma partição da unidade para A subordinada a \mathcal{O} . Recorde que se diz que f é *integrável à Riemann no sentido generalizado* em A se a série de termos não negativos

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi |f|$$

converge, e que se f é integrável, o seu *integral* é a soma da série absolutamente convergente

$$\int_A f = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi f.$$

Use o Teorema da Convergência Monótona para mostrar que se f é integrável neste sentido generalizado então $f \in L^1(A)$, e o Teorema da Convergência Dominada para mostrar que o integral definido desta forma coincide com o integral de Lebesgue de f .

4. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, \mathcal{O} uma cobertura admissível de A , Φ uma partição da unidade subordinada a \mathcal{O} , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável à Riemann no sentido generalizado, $\mathbf{g} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação injectiva de classe C^1 e

$$B = \{\mathbf{x} \in A : J\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Recorde que, pelo teorema de Sard, $D = \mathbf{g}(B)$ tem medida nula.

- (a) Mostre que se $B = \emptyset$ então $C = g(A)$ é aberto. Na realidade é possível mostrar que C é aberto mesmo quando $B \neq \emptyset$ (ou mesmo quando g é apenas contínua - *Teorema de Invariância do Domínio*).
- (b) Mostre que $A \setminus B$ e $C \setminus D$ são abertos.
- (c) Use o Teorema de Mudança de Variáveis (que sabemos ser válido apenas quando $B = \emptyset$) para mostrar que

$$\int_C f = \int_A (f \circ g) |Jg|$$

no caso geral.