

Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha 5

A entregar até à aula teórica de segunda-feira dia 27 de Outubro

1. Escreva cada um dos integrais seguintes pela ordem de integração inversa¹ e depois calcule-o usando uma mudança de coordenadas apropriada.

$$(a) \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} dz dy dx;$$

$$(b) \int_{-a}^a \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} 1 dz dy dx \text{ (com } a, b, c > 0);$$

$$(c) \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \int_0^{x^2+y^2+z^2} 1 dw dz dy dx.$$

2. Prove o *Primeiro Teorema de Pappus*: se $A \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ é mensurável à Jordan, o sólido de revolução S gerado por A identificando \mathbb{R}^2 com o plano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ e rodando este plano em torno do eixo dos yy é mensurável à Jordan e

$$V_3(S) = 2\pi\bar{x}V_2(A),$$

onde \bar{x} é a coordenada x do centróide de A . Qual é a fórmula do volume do toro?

3. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ mensurável à Jordan. O cone de base A e vértice he_{n+1} é o conjunto

$$C = \{(a^1(1-t), \dots, a^n(1-t), ht) \in \mathbb{R}^{n+1} : (a^1, \dots, a^n) \in A \text{ e } t \in [0, 1]\}.$$

- (a) Mostre que C é mensurável à Jordan e que

$$V_{n+1}(C) = \frac{h}{n+1} V_n(A).$$

- (b) Calcule o volume do conjunto

$$\{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : |x^1| + \dots + |x^n| \leq a\},$$

onde $a > 0$.

Não precisam de entregar:

4. (a) Mostre que se um conjunto mensurável à Jordan $A \subset \mathbb{R}^n$ tem medida nula então $V_n(A) = 0$.
(b) Mostre que o conjunto de Cantor é compacto e mensurável à Jordan.

¹A ordem de integração inversa da de $\int \int \dots \int dx^1 dx^2 \dots dx^n$ é a de $\int \dots \int \int dx^n \dots dx^2 dx^1$.

(c) Dê um exemplo de um conjunto compacto que não seja mensurável à Jordan.

5. Mostre que se $A \subset \mathbb{R}^n$ tem medida nula e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 então $g(A)$ tem ainda medida nula.

6. Este exercício destina-se a provar o *Teorema de Sard*: Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, $g : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 e

$$B = \{\mathbf{x} \in A : Jg(\mathbf{x}) = 0\}$$

então $g(B)$ tem medida nula.

Seja $K \subset A$ um n -cubo compacto de lado $l > 0$ com $K \cap B \neq \emptyset$. Dado $\varepsilon > 0$, escolha-se $N \in \mathbb{N}$ e divida-se K em N^n n -subcubos de lado l/N . Seja S um n -subcubo genérico, e tome-se $\mathbf{x} \in S$.

(a) Mostre que para N suficientemente grande

$$\|Dg(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) - g(\mathbf{y}) + g(\mathbf{x})\| \leq \varepsilon \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

para todo o $\mathbf{y} \in S$ e todo o n -subcubo $S \subset K$.

(b) Suponha que $\mathbf{x} \in S \cap B \neq \emptyset$. Mostre que existe um subespaço $V \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão $n - 1$ tal que

$$\{Dg(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) : \mathbf{y} \in S\} \subset V.$$

(c) Mostre que a distância de qualquer ponto de $g(S)$ ao plano $g(\mathbf{x}) + V$ é menor que $\varepsilon\sqrt{n}l/N$.

(d) Mostre que existe $M > 0$ tal que para todo o $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ se tem

$$\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})\| \leq M\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

(e) Conclua que se $S \cap B \neq \emptyset$ então $g(S)$ está contido num cilindro de altura $< 2\varepsilon\sqrt{n}l/N$ e base a bola $(n - 1)$ -dimensional de raio $< M\sqrt{n}l/N$. Conclua que $g(K \cap B)$ tem medida nula, e que portanto $g(B)$ tem medida nula.